國 立 中 央 大 學

統 計 研 究 所

碩 士 論 文

針對受試者操作特徵曲線下部分面積建立的非劣性檢定

研 究 生：陶 漢 威

指導教授：陳 玉 英 博士

中 華 民 國　一 百零一　年　六　月

摘要

本文在病例對照研究之下，探求相對於一種既存標準的醫學診斷方法，另一種嫌究中的醫學診斷方法是否具備非劣性。此一研究中的每一個受試者皆接受兩種不同的診斷方法，所得到的是具有相關性的成對診斷值。本文考慮將成對資料利用冪轉換，轉換成近似二元常態分布的資料，然後進行現有文獻中的有母數非劣性檢定。另一方面，本文應用不同的廣義伽瑪分布描述右偏分布的二個診斷資料，並且使用適當的關聯結構函數聯結上述的兩個邊際分布，用以描述成對資料的聯合分布。然後，在此一聯合分布之下，建構兩條受試者操作特徵曲線，並且根據二條估計的曲線下的部分面積之差異進行非劣性檢定。本文進一步在不同的關聯結構函數、廣義伽瑪分邊際分布、相關係數等條件下，藉由模擬研究探討本文所提檢定方法的型 I 誤差率和檢定力表現。最後藉由分析一個實例說明上述檢定方法的應用。

關鍵字：關聯結構函數;廣義伽瑪分布;受試者操作特徵曲線;非劣性檢定

Abstract

In this paper, we consider testing the non-inferiority of two medical diagnostic methods in a case-control study where each subject receiving the two different diagnostics produces correlated paired measurements. Note that it occurs often in practice that the marginal distributions of the measurements are right-skewed. Therefore, we first apply the power transformation to the paired data so that they would behave like the bivariate normal data. One parametric non-inferiority test is then implemented based on the transformed data. On the other hand, we suggest and employ appropriate copula function which links two generalized gamma distributions to describe the joint distribution of the paired measurements. Under the joint distribution, an approximate test based on the difference between the partial areas under the two estimated Receiver Operating Characteristic (ROC) curves is then constructed. In this paper, we would like to test if the difference between the true areas is within an allowable region. The results of a simulation investigation of the level and power performances of the approximate test for different degrees of correlation in several possible copula functions with a variety of marginal distributions are reported. Finally, a real data set is illustrated by using the approximate test.

Keywords: Copula functions; generalized gamma distribution; Receiver Operating Characteristic curve; non-inferiority test

致謝辭

首先要感謝指導教授 陳玉英博士的悉心照顧與指導，使我在學業上獲益良多，透過與老師每週的討論，都讓我對自己的研究領域激盪出不少想法，而在這過程中，亦曾遇到許多大大小小的難題，都要感謝老師傾心指導，才能順利地完成本篇論文。在此，亦感謝口試委員 鄒宗山教授、稽允嬋教授及黃冠華教授寶貴的建議，使得本篇論文更加完整。然後，感謝所上所有的老師與所辦小姐在這兩年內的照顧與指導，才能在課業和生活各方面有所增進。

感謝文明學長、任勛和國松的陪伴與分享，謝謝學長不厭其煩地指導，也感謝任勛和國松的鼓勵，那段共同打氣加油的日子，是我永遠難以忘懷的回憶。亦感謝親愛的室友們，願意與我分享心情，讓我感到溫馨和感動，很高興能夠與你們當室友。再來感謝 99 級全體同學，使我增添不少生活中的歡笑與樂趣。最後要感謝我親愛的家人對我的栽培、支持與關懷。僅將本文獻給所有關心我的人。

陶漢威 謹致於

國立中央大學統計研究所

中華民國一百零一年六月

目錄

圖目錄

表目錄

第一章 研究動機及目的

現今醫學可能藉由影像，也可能利用某種生物指標(biomarker)來診斷病人是否罹患某一種疾病。然而，利用生物指標診斷病情必須瞭解此一生物指標和病情的相關性，例如：罹患此種疾病的受試者之指標值可能比健康受試者的指標值高。因此，若此一生物指標值大於某一臨界值 c，則判斷結果為陽性，即受試者為患病者；否則，判斷為陰性，即受試者無患病。

在醫學診斷中，比較新的診斷方法與現行標準診斷方法的準確性是一項重要的課題。事實上，評估一種醫學診斷方法的準確性，必須衡量其敏感度(sensitivity; 簡記為 *Se*) 和特異性(specificity; 簡記為 *Sp*)。其中，敏感度是患病的受試者被正確地診斷為陽性的機率，又稱做真陽率(true-positive rate; 簡記為 TPR)，特異性是指無病的受試者被正確地診斷為陰性的機率，又稱做真陰率(true-negative rate; 簡記為 TNR)。當敏感度和特異性越高，則表示該診斷方法的診斷準確性越高。

令 X 為患病受試者的診斷值，Y 為無病受試者的診斷值，則敏感度為 $Se(c)=P(X>c)$，而特異性為 $Sp(c)=P(Y\le c)$。假設 X 和 Y 皆為連續型變數，則 $1-Sp(c)=P(Y>c)$ 是無病受試者被錯誤地診斷為陽性的機率，又稱為偽陽率 (false-positive rate; 簡記為 FPR)。當 c 值變動時，敏感度與特異性亦跟著改變，例如：當 c 值變大時，敏感度降低，特異性卻增加；當 c 值變小時，

敏感度增加，特異性卻降低。針對一個診斷方法，為表現其總體的診斷特性，以$1-Sp(c)$為 X 軸，以$Se(c)$為 Y 軸，根據不同的 c 值，可以畫出一條曲線，稱為受試者操作特徵曲線(Receiver Operating Characteristic Curve; 簡稱為 ROC 曲線)。此一曲線是位於第一象限的一個非遞減函數：$\mathrm{ROC}(c)=\left\{(P(Y>c),P(X>c)),c\in\mathbb{R}\right\}$。一般的受試者操作特徵曲線如圖 1 所示。

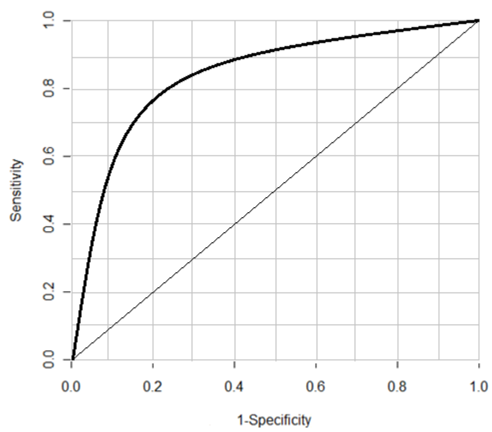

圖 1 受試者操作特徵曲線

Lusted (1971)首先利用 ROC 曲線評估診斷方法的準確性，目前醫學界也已經廣泛使用，並且成功地將之應用在放射學、精神病學和流行病學等領域。之後更有許多學者陸續進行相關的研究(Shapiro, 1999; Greiner et al., 2000; Zhou et al., 2002; Pepe, 2003) 。實務上最常使用來彙總受試者操作特徵曲線訊息的量數就是此一曲線下的面積(Area under the ROC curve; 簡稱為 AUC)。Bamber (1975)推導得知$\mathrm{AUC}=P\{X>Y\}$。當受試者操作特徵曲線

為通過原點且斜率為 1 的直線時，AUC 值為 0.5，此時，表示不論 c 值為何，真陽率和偽陽率分別都是 0.5，也就是說，這個診斷方法是隨機地判斷得病的情況，沒有區別能力。而當 AUC 值為 1.0 時，表示不論 c 值是多少，真陽率都是 1.0，也就是說，此診斷方法可以完全地鑑別出患病者與非患病者，是最佳的情況。所以合理的 AUC 值應該在 0.5 和 1.0 之間。

因為在實務上希望診斷方法偽陽率能夠控制在一定範圍內，因此有另一種彙總 ROC 曲線訊息的量數，亦即在偽陽率控制在 p 以下的 ROC 曲線下的部分面積(Partial area under the ROC curve; 簡稱為 pAUC) 。根據 Thompson and Zucchini (1989)，McClish (1989)，及 Aiyi Liu (2005)提出的方法，我們可以將 ROC 曲線改寫成

$$ROC(t) = S_X(S_Y^{-1}(t)), 0 \le t \le 1 \tag{1.1}$$

其中 $S_X(.)$ 為患病受試者的診斷值的存活函數，$S_Y^{-1}(.)$ 為無病受試者的診斷值存活反函數，則 pAUC(p)可由(1.1)得到

$$pAUC(p) = \int_0^p ROC(t)dt = \int_0^p S_X(S_Y^{-1}(t))dt = P\{X \ge Y, 0 \le S_Y(Y) \le p\} \tag{1.2}$$

若目前有一種新的診斷方法，相較於標準診斷方法有非侵入性、低輻射、成本較低或操作容易等優點，此時，希望檢定的是新的診斷方法與標準診斷方法在診斷準確性的差異是在一定的容忍範圍之內。因此，所檢定的是新的診斷方法非劣於標準診斷方法。令 θ_1 為新的診斷方法之 pAUC(p)值，而 θ_2 為標準診斷方法的 pAUC(p)值，則此一非劣性檢定的統計假設如

下：

$$\mathrm{H}_0\text{: } \theta_1-\theta_2 \le \delta \quad vs. \quad \mathrm{H}_1\text{: } \delta < \theta_1-\theta_2 \tag{1.3}$$

其中δ為可容忍的範圍。

本文將回顧統計假設(1.3)的無母數和有母數的檢定方法，一般而言，無母數檢定方法在檢定力的表現比較弱；而在常態分布假設下的有母數檢定方法，則是在非常態資料下，無法保持其顯著水準。

傳統的統計檢定方法都假設醫學診斷值為對稱分布的資料。實務上，當患病者的診斷值偏高時，因為病情嚴重程度不一，患病者的診斷值分布不一定對稱。另一方面，多數健康者的診斷值會比較低，而出現高診斷值的人相對會比較少，所以資料也有可能是右偏分布。因此，針對非常態分布資料，便有學者進行相關的研究。Molodianovitch et al.(2006)提出使用Box-Cox(1964)的冪轉換法，將成對資料轉換為二元常態分布，本文建議用此一方法將資料轉換後，再進行 McClish(1989)所提出在二元常態分布下的非劣性檢定；此外，考慮診斷值服從廣義伽瑪分布(Stacy, 1962；Cox et al., 2007)，進行檢定統計假設(1.3)的非劣性檢定。值得一提的是，廣義伽瑪分布包含實務上常用的伽瑪(Gamma)分布、韋柏(Weibull)分布、和對數常態(Lognormal)分布，及其它多種的右偏分布，可廣泛地用於描述右偏資料的分布。此外，為了能夠更有彈性地配適資料，本文引進關聯結構函數(Copula)聯結兩個邊際廣義伽瑪分布，描述成對資料的聯合分布，再進行新的診斷

方法的準確性是否非劣於標準診斷方法的有母數檢定。

第二章將回顧針對兩種診斷方法 pAUC(p)值的各種估計與檢定方法，並且介紹廣義伽瑪分布、關聯結構函數及冪轉換。本文的第三章說明如何利用關聯結構函數建立二元廣義伽瑪分布，並且在此架構下估計 pAUC(p)值進一步建立非劣性檢定。第四章利用模擬方法探討上述檢定方法的型Ⅰ誤差及檢定力的表現。第五章舉一實例說明上述方法之應用。最後，在第六章進行討論與總結。

第二章 文獻回顧

本章分別針對統計假設(1.3)，依序回顧針對 pAUC(p)值進行的非劣性檢定，並且介紹關聯結構函數的相關研究。假設有 $N=m+n$ 個受試者皆接受某種疾病的二種診斷方法，其中 m 個受試者罹患此種疾病，另外 n 個並未罹患此種疾病。此一病例對照研究中的變數為 X_{hi} 和 Y_{hj}，其中 X_{hi} 為第 i 個患病受試者接受第 h 個診斷方法的診斷結果，Y_{hj} 則為第 j 個無病受試者接受第 h 個診斷方法的診斷結果，$i=1,...,m$，$j=1,...,n$，$h=1,2$。

2.1 冪轉換資料

Faraggi et al.(2002)針對非常態分布資料利用 Box-Cox(1964)冪轉換法將兩組成對資料，(X_1, X_2) 和 (Y_1, Y_2)，分別轉換為二元常態分布的資料

$$(X_h^{(\upsilon_h)}, Y_h^{(\upsilon_h)}) = \begin{cases} \left(\dfrac{(X_h)^{\upsilon_h}-1}{\upsilon_h}, \dfrac{(Y_h)^{\upsilon_h}-1}{\upsilon_h}\right), & \upsilon_h \neq 0 \\ (\log(X_h), \log(Y_h)), & \upsilon_h = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

若 $(X_1^{(\upsilon_1)}, X_2^{(\upsilon_2)})$ 及 $(Y_1^{(\upsilon_1)}, Y_2^{(\upsilon_2)})$ 為二元常態分布之變數，則其概似函數為

$$\begin{aligned}
&-\frac{m}{2}\log(1-\rho_X^2) - \frac{1}{2(1-\rho_X^2)}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{X_{1i}^{(\upsilon_1)}-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)^2 - 2\rho_X\left(\frac{X_{1i}^{(\upsilon_1)}-\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\right)\left(\frac{X_{2i}^{(\upsilon_2)}-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)+\left(\frac{X_{2i}^{(\upsilon_2)}-\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\right)^2\right)\\
&+(\upsilon_1-1)\sum_{i=1}^{m}\log(X_{1i}) + (\upsilon_2-1)\sum_{i=1}^{m}\log(X_{2i}) - m\log(2\pi\sigma_{X_1}\sigma_{X_2})\\
&-\frac{m}{2}\log(1-\rho_Y^2) - \frac{1}{2(1-\rho_Y^2)}\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{Y_{1i}^{(\upsilon_1)}-\mu_{Y_1}}{\sigma_{Y_1}}\right)^2 - 2\rho_Y\left(\frac{Y_{1i}^{(\upsilon_1)}-\mu_{Y_1}}{\sigma_{Y_1}}\right)\left(\frac{Y_{2i}^{(\upsilon_2)}-\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_2}}\right)+\left(\frac{Y_{2i}^{(\upsilon_2)}-\mu_{Y_2}}{\sigma_{Y_2}}\right)^2\right)\\
&+(\upsilon_1-1)\sum_{i=1}^{m}\log(Y_{1i}) + (\upsilon_2-1)\sum_{i=1}^{m}\log(Y_{2i}) - m\log(2\pi\sigma_{Y_1}\sigma_{Y_2})
\end{aligned} \tag{2.2}$$

因此，(υ_1,υ_2) 的最大概似估計式 $(\hat{\upsilon}_1,\hat{\upsilon}_2)$ 為使(2.2)式達極大值的 (υ_1,υ_2)。此時，可假設轉換後資料分布為

$$(X_1^{(\upsilon_1)},X_2^{(\upsilon_2)}) \sim BVN\left(\begin{pmatrix}\mu_{X_1^{(\upsilon_1)}}\\ \mu_{X_2^{(\upsilon_2)}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma^2_{X_1^{(\upsilon_1)}} & \sigma_{X_1^{(\upsilon_1)}}\sigma_{X_2^{(\upsilon_2)}}\rho_{X^{(\upsilon)}}\\ \sigma_{X_1^{(\upsilon_1)}}\sigma_{X_2^{(\upsilon_2)}}\rho_{X^{(\upsilon)}} & \sigma^2_{X_2^{(\upsilon_2)}}\end{pmatrix}\right)$$

$$(Y_1^{(\upsilon_1)},Y_2^{(\upsilon_2)}) \sim BVN\left(\begin{pmatrix}\mu_{Y_1^{(\upsilon_1)}}\\ \mu_{Y_2^{(\upsilon_2)}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma^2_{Y_1^{(\upsilon_1)}} & \sigma_{Y_1^{(\upsilon_1)}}\sigma_{Y_2^{(\upsilon_2)}}\rho_{Y^{(\upsilon)}}\\ \sigma_{Y_1^{(\upsilon_1)}}\sigma_{Y_2^{(\upsilon_2)}}\rho_{Y^{(\upsilon)}} & \sigma^2_{Y_2^{(\upsilon_2)}}\end{pmatrix}\right)$$

以 Box-Cox 冪轉換成對資料使之服從二元常態分布，再根據轉換後的資料建構受試者操作特徵曲線，並且針對兩種診斷方法的 pAUC 值進行估計及檢定。

2.2 無母數非劣性檢定

Dong (2002)推導得知 $\theta = P\{X \ge Y, 0 \le S_Y(Y) \le p\}$，並且利用 Mann-Whitney 統計式(1947)得到 θ 的估計式為

$$\hat{\theta}(p) = \frac{1}{m\,n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w(X_i,Y_j,p) \text{ ，} \tag{2.3}$$

其中 $w(X_i,Y_j,p) = I(X_i > Y_j, 0 \le \hat{S}_Y(Y_j) \le p) + \frac{1}{2}I(X_i = Y_j, 0 \le \hat{S}_Y(Y_j) \le p)$ 。

雖然 $\mathrm{E}[\hat{\theta}(p)] = P(X > Y, 0 \le \hat{S}_Y(Y) \le p) + \frac{1}{2}P(X = Y, 0 \le \hat{S}_Y(Y) \le p)$，但是當 X 和 Y

皆為連續型變數時，$P(X=Y, 0 \le \hat{S}_Y(Y) \le p)=0$，所以估計式$\hat{\theta}$是$\theta$的不偏估計式。

假設θ_1與θ_2分別為兩種診斷方法的 pAUC 值，藉由上述統計式可求得其估計值為$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$。我們可以利用 Bootstrap 方法去找出$\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2$的分配，並找出其 p 值，其演算過程如下：

步驟 1：根據原始資料$\{(X_{1i}, X_{2i}),\ \ i=1,...,m\}$和$\{(Y_{1j}, Y_{2j}),\ j=1,...,n\}$分別估計$\theta_1$和$\theta_2$，記為$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$，且進一步計算$\hat{d}=\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2$。

步驟 2：根據原始資料$\{(X_{1i}, X_{2i}),\ \ i=1,...,m\}$中，抽出一組包含 m 筆資料的隨機樣本，記作$(x_{1i}^*, x_{2i}^*), i=1,...,m$。同樣地，從原始資料$\{(Y_{1j}, Y_{2j}),\ j=1,...,n\}$中，抽出一組包含 n 筆資料的隨機樣本，記作$(y_{1j}^*, y_{2j}^*), j=1,...,n$。

步驟 3：根據上述的自助樣本資料，計算得到$(\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*)$，並且求得$\hat{d}^*=\hat{\theta}_1^*-\hat{\theta}_2^*$。

步驟 4：重覆步驟 2 和步驟 3 共 B 次。可計算獲得$\hat{d}^{*b}$，$b=1,...,B$。

步驟 5：將步驟 4 中的$\hat{d}^{*b}$值，與δ_{L}比較，計算出。$\hat{d}^{*b}$小於等於δ_{L}的個數，k，則可用 k/B 得到 p 值。

2.3 常態分布下的有母數非劣性檢定

令$(\hat{\mu}_{X_1}, \hat{\mu}_{X_2}, \hat{\mu}_{Y_1}, \hat{\mu}_{Y_2}, \hat{\sigma}_{X_1}^2, \hat{\sigma}_{X_2}^2, \hat{\sigma}_{Y_1}^2, \hat{\sigma}_{Y_2}^2, \hat{\rho}_X, \hat{\rho}_Y, \hat{\upsilon}_1, \hat{\upsilon}_2)$為(2.2)式的最大概似估計量(MLE)，我們可以利用此估計量以及 McClish(1989)所提出的方法來

估計 $\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2$，其估計式為

$$\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2=\int_0^p \Phi(\frac{\hat{\mu}_{X_1}-\hat{\mu}_{Y_1}}{\hat{\sigma}_{X_1}}+\frac{\hat{\sigma}_{Y_1}}{\hat{\sigma}_{X_1}}\Phi^{-1}(t))dt-\int_0^p \Phi(\frac{\hat{\mu}_{X_2}-\hat{\mu}_{Y_2}}{\hat{\sigma}_{X_2}}+\frac{\hat{\sigma}_{Y_2}}{\hat{\sigma}_{X_2}}\Phi^{-1}(t))dt \quad (2.4)$$

此估計量會趨近於常態分布，其 p 值為

$$1-\Phi(\frac{\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2-(\delta_L)}{s(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)}) \quad (2.5)$$

其中 $s(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)$ 為 $\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2$ 的標準差估計量，可利用 Delta 方法計算。

2.4 廣義伽瑪分布

Stacy (1962)首次提出廣義伽瑪分布(Generalized Gamma distribution)，簡稱 GG，而 Cox et al. (2007)將之推廣並且簡化分布的函數。假設隨機變數 X 的分布為 $GG(\beta,\sigma,\lambda)$，其中 β 為位移(location)參數，σ 為尺度(scale)參數，λ 為形狀(shape)參數。則此一廣義伽瑪分布的機率密度函數為

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\lambda|}{\sigma x\Gamma(\frac{1}{\lambda^2})}\left[\dfrac{1}{\lambda^2}(e^{-\beta}x)^{\frac{\lambda}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\lambda^2}}\exp\left[-\dfrac{1}{\lambda^2}(e^{-\beta}x)^{\frac{\lambda}{\sigma}}\right], & if\ \lambda\neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\dfrac{\left(\log(x)-\beta\right)^2}{(2\sigma^2)}\right], & if\ \lambda=0 \end{cases} \quad (2.6)$$

令 $\Gamma(t;\gamma)=\dfrac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t x^{\gamma-1}e^{-x}dx$，則其累積分布函數為

$$F(x)=\begin{cases}\Gamma\left[\frac{1}{\lambda^2}(e^{-\beta}x)^{\frac{\lambda}{\sigma}};\frac{1}{\lambda^2}\right] , & if\ \lambda>0\\ 1-\Phi\left(\log\left(\left(e^{-\beta}x\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)\right) , & if\ \lambda=0\\ 1-\Gamma\left[\frac{1}{\lambda^2}(e^{-\beta}x)^{\frac{\lambda}{\sigma}};\frac{1}{\lambda^2}\right] , & if\ \lambda<0\end{cases} \tag{2.7}$$

其中$\Phi(\cdot)$為標準常態分布的累積分布函數。

值得一提的是，當廣義伽瑪分布中的形狀參數$\lambda=0$時，則其分布近似對數常態分布； $\lambda=1$時，其分布為韋柏分布。若其形狀參數和尺度參數相等時，即$\lambda=\sigma$ ，則此分布為伽瑪分布。$\lambda=\sigma=1$時，則其分布為指數分布。由此可知，廣義伽瑪分布包含實務上常用的右偏分布，可廣泛地用於描述右偏資料的分布。

2.5 關聯結構函數

關聯結構函數(Copula)最早見於以法文寫作的論文(Sklar, 1959)，是根據個別邊際分布建構多元聯合分布的方法，之後在 Nelsen (2006)的書中對其定義與應用則有詳細的介紹。令$X_1,\ldots,X_h$的累積分布函數分別為$F_1,\ldots,F_h$，則$(X_1,\ldots,X_h)$的累積分布函數$F(x_1,\ldots,x_h)$可表示為$C\left[F_1(x_1),\ldots,F_h(x_h)\right]$，其中函數$C$滿足下列三個條件：

1. $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$
2. C是遞增的函數

3. C 的所有邊際函數 C_i 滿足：

$$C_i(u) = C(1,\ldots,1,u,1,\ldots,1) = u \text{ ，其中 } u \in [0,1]$$

而下述的 Sklar's 定理是大多數關聯結構函數應用的基礎。

定理 2.4.1：(Sklar's Theorem)

若 $F(\cdot)$ 是一個 n 維的累積機率分布函數，其邊際函數是連續函數 $F_1,...,F_n$ ，則可以找到唯一的關聯結構函數使得 $F(x_1,...,x_n) = C(F_1(x_1),...,F_n(x_n))$ 。

透過 Sklar 的定理可以確定，就連續型隨機變數的聯合分布函數而言，函數 C 是唯一的。因此，可以得知 $(X_1,\ldots,X_h)$ 的聯合機率密度函數 $f(x_1,\ldots,x_h)$ 可展開為

$$f(x_1,\ldots,x_h) = \frac{\partial F(x_1,\ldots,x_h)}{\partial x_1 \cdots \partial x_h} = \frac{\partial C\left(F_1(x_1),\ldots,F_h(x_h)\right)}{\partial x_1 \cdots \partial x_h}$$

$$= \frac{\partial C(u_1,\ldots,u_h)}{\partial u_1 \cdots \partial u_h} \times \prod_{i=1}^{h} \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i}$$

$$= c(u_1,\ldots,u_h) \times \prod_{i=1}^{h} f_i(x_i)$$

其中 $u_i = F_i(x_i),\ i = 1,\ldots,h$ ，$c(u_1,\ldots,u_h)$ 則為關聯結構的機率密度函數。

本文使用兩種常用的二維關聯結構函數，分別為如下所述的甘伯關聯結構(Gumbel copula)和法蘭克關聯結構(Frank copula)：

甘伯關聯結構：$C_\alpha(u,v)=\exp\left(-\left[(-\ln u)^\alpha+(-\ln v)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}}\right),\quad \alpha\in[1,\infty)$

法蘭克關聯結構：$C_\alpha(u,v)=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(e^{-\alpha u}-1)(e^{-\alpha v}-1)}{e^{-\alpha}-1}\right),\quad \alpha\in(-\infty,\infty)\setminus\{0\}$

其中 u, v 分別為 X_1 和 X_2 的累積分布函數，而 α 則是一個用來表示 (X_1, X_2) 相關性的參數，可透過與 Kendall’s tau 的關係式轉換而得，其關係式為

$$\tau=4\iint_{I^2}C_\alpha(u,v)dC_\alpha(u,v)-1$$ 。

本文在生成資料模擬的部分，即在給定的關聯結構函數和 Kendall’s tau 之下，代入上述關係式計算出 α，得到特定的關聯結構函數，藉以生成二元變數資料。

第三章 統計方法

假設變數X_{1i}，X_{2i}，Y_{1j}和Y_{2j}，$i=1,...,m; j=1,...,n$，的邊際分布分別為廣義的伽瑪分布，記作

$$X_{hi} \sim GG(\beta_{X_h},\ \sigma_{X_h},\ \lambda_{X_h}),\ \ i=1,...,m,\quad h=1,2 \text{，}$$

且

$$Y_{hj} \sim GG(\beta_{Y_h},\ \sigma_{Y_h},\ \lambda_{Y_h}),\ \ j=1,...,n,\ \ h=1,2 \text{，}$$

其中$\beta_.$、$\alpha_.$和$\lambda_.$分別為分布的位置、尺度和形狀參數。

因為X_1和X_2為相關的變數，同樣地，Y_1和Y_2也是相關的變數，本文進一步利用關聯結構函數建構二元廣義伽瑪分布機率密度函數。在此，只考慮變數間相關性可能為正或為負的甘伯關聯結構函數與法蘭克關聯結構函數。由甘伯關聯結構函數聯結的二元廣義伽瑪分布之機率密度函數為

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\frac{(-\ln u)^{\alpha-1}(-\ln v)^{\alpha-1}}{uv}\exp\left[-((-\ln u)^{\alpha}+(-\ln v)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$

$$\times\left\{\left[(-\ln u)^{\alpha}+(-\ln v)^{\alpha}\right]^{2(\frac{1}{\alpha}-1)}-(1-\alpha)\left[(-\ln u)^{\alpha}+(-\ln v)^{\alpha}\right]^{(\frac{1}{\alpha}-2)}\right\}f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) \text{，}$$

由法蘭克關聯結構函數聯結的二元廣義伽瑪分布之機率密度函數則為

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=-\frac{\alpha e^{-\alpha u}e^{-\alpha v}(e^{-\alpha}-1)}{\left[(e^{-\alpha}-1)+(e^{-\alpha u}-1)(e^{-\alpha v}-1)\right]^2}f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

其中 u 為 X_1 的累積分布函數，v 為 X_2 的累積分布函數，α 為關聯結構函數中的參數，用來描述成對資料的相關性。因為 X 和 Y 是兩個互相獨立的群體，所以本文考慮的 (X_1,X_2) 和 (Y_1,Y_2) 之聯合分布可以由不同的關聯結構函數聯結邊際廣義伽瑪分布，例如：(X_1,X_2) 是由甘伯關聯結構函數聯結，而 (Y_1,Y_2) 是由法蘭克關聯結構函數聯結。

令參數 $\mathbf{P_X}=\left(\beta_{X_1},\sigma_{X_1},\lambda_{X_1},\beta_{X_2},\sigma_{X_2},\lambda_{X_2}\right)'$ 和 $\mathbf{P_Y}=\left(\beta_{Y_1},\sigma_{Y_1},\lambda_{Y_1},\beta_{Y_2},\sigma_{Y_2},\lambda_{Y_2}\right)'$。再令 $\mathbf{P}'=\left(\mathbf{P_X}',\mathbf{P_Y}'\right)$。利用上述的機率密度函數與觀測資料建構參數 $\left(\mathbf{P_X}',\alpha_X\right)$ 的概似函數和參數 $\left(\mathbf{P_Y}',\alpha_Y\right)$ 的概似函數。本文建議應用 R 統計軟體，求得參數向量 $\mathbf{P_X}$ 和 $\mathbf{P_Y}$ 的最大概似估計式為 $\hat{\mathbf{P}}_\mathbf{X}=\left(\hat{\beta}_{X_1},\hat{\sigma}_{X_1},\hat{\lambda}_{X_1},\hat{\beta}_{X_2},\hat{\sigma}_{X_2},\hat{\lambda}_{X_2}\right)'$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_\mathbf{Y}=\left(\hat{\beta}_{Y_1},\hat{\sigma}_{Y_1},\hat{\lambda}_{Y_1},\hat{\beta}_{Y_2},\hat{\sigma}_{Y_2},\hat{\lambda}_{Y_2}\right)'$，並且分別求得 $\hat{\mathbf{P}}_\mathbf{X}$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_\mathbf{Y}$ 的共變異數矩陣估計式 $\hat{\Sigma}_\mathrm{X}$ 和 $\hat{\Sigma}_\mathrm{Y}$。因為 X 和 Y 互相獨立，所以 $\hat{\mathbf{P}}$ 的變異數估計值為 $\hat{\Sigma}=\begin{bmatrix}\hat{\Sigma}_\mathbf{X} & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \hat{\Sigma}_\mathbf{Y}\end{bmatrix}$。

本文的檢定對象為兩個 pAUC 的差異，所以，建議先在上述分布之下，求出 pAUC。由(1.1)式的結果，

$$pAUC(p)=\int_0^p ROC(t)dt=\int_0^p S_X(S_Y^{-1}(t))dt=P\{X\ge Y,0\le S_Y(Y)\le p\}\text{。}$$

此時，pAUC 是 $S_X(.)$ 和 $S_Y^{-1}(.)$ 的函數，其中 $S_X(.)$ 和 $S_Y^{-1}(.)$ 又是決定於參數向量 $\mathbf{P_X}$ 和 $\mathbf{P_Y}$。針對 X 和 Y 分布皆為指數分布或韋柏分布時，本文推導

出其 pAUC 值和參數的關係式，並將其展示於附錄，針對 X 和 Y 分布皆為伽瑪分布和廣義伽瑪分布時，可利用 R 軟體的函數指令 integrate 求得其 pAUC 值。

直接將 $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{X}}$ 和 $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{Y}}$ 代入(1.1)，可求得 θ_1 和 θ_2 的估計值 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$。令

$$D(\mathbf{P}) = \theta_1 - \theta_2 = \int_0^p S_{X_1}(S_{Y_1}^{-1}(t))dt - \int_0^p S_{X_2}(S_{Y_2}^{-1}(t))dt \text{ ，} \tag{3.2}$$

則 $D(\hat{\mathbf{P}}) = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2$。本文利用 Delta 方法求出 $D(\hat{\mathbf{P}})$ 的近似變異數。針對 $D(\mathbf{P})$ 求得個別參數的偏微分，然後以 $\hat{\mathbf{P}}$ 代入 $\mathbf{P}$，得到向量 $\mathbf{b}$。因為在二元廣義伽瑪分布中，向量 $\mathbf{b}$ 難以計算，本文建議利用 R 統計軟體中的程式套件 *grad*，計算向量 $\mathbf{b}$ 為

$$\mathbf{b}^{\mathbf{T}} = \left(\frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \beta_{x1}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \sigma_{x1}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \lambda_{x1}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \beta_{x2}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \sigma_{x2}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \lambda_{x2}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \beta_{y1}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \sigma_{y1}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \lambda_{y1}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \beta_{y2}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \sigma_{y2}}, \frac{\partial D(\hat{\mathbf{P}})}{\partial \lambda_{y2}}\right)$$

然後，求出 $D(\hat{\mathbf{P}})$ 的變異數估計式為

$$\hat{\mathrm{var}}(D(\hat{\mathbf{P}})) = \hat{\mathrm{var}}(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \mathbf{b}^{\mathbf{T}} \hat{\Sigma} \mathbf{b} \text{ 。}$$

令

$$s(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2) = \sqrt{\hat{\mathrm{var}}(D(\hat{\mathbf{P}}))}$$

則其 p 值為

$$1 - \Phi\left(\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 - (\delta_L)}{s(\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)}\right) \tag{3.3}$$

若其 p 值小於α，則在顯著水準為α之下推論新的診斷方法非劣於標準診斷方法。

第四章 模擬研究

4.1 模擬方法

此一模擬研究將比較無母數方法(NP)、Box-Cox 冪轉換法(NT)與二元廣義伽瑪分布(GG)的有母數方法在非劣性檢定的型Ⅰ誤差率和檢定力表現。本文考慮 Kendall's tau 為$(\tau_X,\tau_Y)=(0,0),(0.2,0),(0.5,0),(0.5,0.2)$四種不同的非負相關情形，樣本數為$(m,n)=(50,50)$、$(100,50)$、(100,100) 等三種情形，在 $p=0.2,0.1$之下，真正 pAUC 差異容忍下界為$\delta_L=-0.02$ 或 -0.01，估計上述非劣性檢定的型Ⅰ誤差率和檢定力。模擬資料的邊際分布為指數分布、韋柏分布和廣義伽瑪分布，且(X_1,X_2)和(Y_1,Y_2)各自的聯合機率密度函數由下列三種組合的關聯結構函數建構：

(a) (X_1,X_2)和(Y_1,Y_2)皆由法蘭克關聯結構建構二元機率密度函數

(b) (X_1,X_2)和(Y_1,Y_2)皆由甘伯關聯結構建構二元機率密度函數

(c) (X_1,X_2)和(Y_1,Y_2)各由甘伯和法蘭克關聯結構建構二元機率密度函數。

在估計顯著水準時，本文考慮不同 pAUC 的差異。當 $p=0.2$時，考慮的θ_2值為$0.14, 0.11,$ 或0.06之下，且$\theta_1-\theta_2=-0.02$；當 $p=0.1$時，考慮的θ_2值為$0.06, 0.045,$ 或0.03之下且$\theta_1-\theta_2=-0.01$；。這是考量標準醫學診斷方法具有合理診斷準確性的情形。但是檢定力是對立假說成立時，拒絕虛無假說的機率，所以模擬條件為，當 $p=0.2$ 且θ_2值為$0.14, 0.11,$ 或0.06時，

$\theta_1-\theta_2=-0.005$；當 $p=0.1$ 且 θ_2 值為 $0.06, 0.045,$ 或 0.03 時，$\theta_1-\theta_2=-0.0025$ 。

本文的模擬研究是利用 R 統計軟體進行資料的生成與相關計算。生成資料時，分布中的參數是根據附錄中參數與 pAUC 值的關係式設定。針對二元指數分布來說，若 $X \sim Exp(\lambda_X)$，$Y \sim Exp(\lambda_Y)$，則 $\mathrm{pAUC(p)}=\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}p^{\frac{\lambda_X+\lambda_Y}{\lambda_X}}$ 。針對具有相同形狀參數 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 但是不同尺度參數的二元韋柏分布而言，若 $X \sim Weibull(\beta_X,\alpha)$，$Y \sim Weibull(\beta_Y,\alpha)$，則 $\mathrm{pAUC(p)}=\frac{\beta_X^\alpha}{\beta_X^\alpha+\beta_Y^\alpha}p^{\frac{\beta_X^\alpha+\beta_Y^\alpha}{\beta_X^\alpha}}$ 。

本研究重複次數為 2000 次，因此，在顯著水準為 0.05 下，估計顯著水準的標準差為 $\sqrt{(0.05)(0.95)/2000}\approx 0.005$。若估計的顯著水準在 $(0.040, 0.060)$ 之外，則判斷此一檢定無法維持其顯著水準 0.05 。在虛無假說成立下，計算 2000 次當中拒絕虛無假說的比例，此為型 I 誤差率估計值。檢定力估計值則是在對立假說成立時，計算 2000 次當中拒絕虛無假說的比例。假設 (τ_X,τ_Y) 表示為患病者及無病者的 Kendall's tau，(m,n) 分別是患病者與無病者的個數。

4.2 模擬結果

冪轉換資料是希望經此轉換後，右偏成對資料能近似二元常態分布，但是，針對 (X_1,X_2) 和 (Y_1,Y_2) 各有不同形式的二元分布時，此一冪轉換，即 $(X_1^{\upsilon_1},X_2^{\upsilon_2})$ 和 $(Y_1^{\upsilon_1},Y_2^{\upsilon_2})$ 未必能近似於二元常態分布。所以，此一 NT 檢定，

有時過於保守，有時又無法維持住顯著水準；而無母數方法則在大部分的情況下都過於保守。

相對而言本文考慮的二元廣義伽瑪分布的有母數方法， 其型 I 誤差率比較能維持在顯著水準$\alpha = 0.05$之下，雖然在小樣本或是標準診斷方法準確性較高情形下，型 I 誤差率也有偏高之勢。

整體而言，隨著樣本數的增加、成對資料相關性或是標準診斷方法準確性的提高，檢定力估計也會有增高的趨勢。這是因為當兩種診斷結果的相關性愈高，愈容易支持兩種診斷方法準確性的相等性，因此檢定力估計愈高。觀看三種方法的檢定力估計，發現當相關性提高或是 pAUC 值增加，本文所提的有母數方法的檢定力估計愈明顯高於另外兩種方法。在所有考慮的情形下，冪轉換法的檢定力估計是最低的，無母數方法則介於其間。

綜合上述模擬結果，顯示在型 I 誤差率估計方面，無母數方法與本文所提的有母數方法多能控制型 I 誤差率在設定的顯著水準之下，本文所提的有母數方法的檢定力表現則明顯地高於無母數方法和冪轉換法。由此可知，不論比較型 I 誤差率或檢定力，本文在廣義伽瑪分布之下建立的有母數方法比其它相等性檢定方法更適合分析右偏分布資料。

第五章 實例分析

此筆資料是針對胰腺癌所做的一項研究。早期的胰腺癌大多沒有特異性的症狀，實驗室及其他檢查結果也缺乏特異性，胰腺癌病例因為膽道下端梗阻，血清膽紅素可能顯著增高，主要是因為直接性膽紅素含量增高，其它如血清澱粉酶升高、空腹血糖升高等，但是均無特異性，故常延誤診治。近年來國內外都在努力尋找胰腺癌特異性抗原物質，如癌胚抗原(CEA)、胰胚抗原(POA)、胰腺癌相關抗原(PCAA)、醣類抗原(CA19-9)、癌症抗原(CA125)、胰腺癌特異抗原(PaA)和白細胞粘附抑制試驗(LAIT)等。本文所分析的這一筆資料(Zhou et al.(2002))即是針對 51 位罹患胰腺炎 (control) 與 90 位罹患胰腺癌 (case) 的病患，分別檢測他們血液中 CA19-9 和 CA125 兩種生物指標值。令 X_1 和 X_2 分別代表胰腺癌患者的 CA125 和 CA19-9 的值，Y_1 和 Y_2 則是胰腺炎患者的 CA125 和 CA19-9 的值。根據資料，可以建構出兩條受試者操作特徵曲線，如下所示：

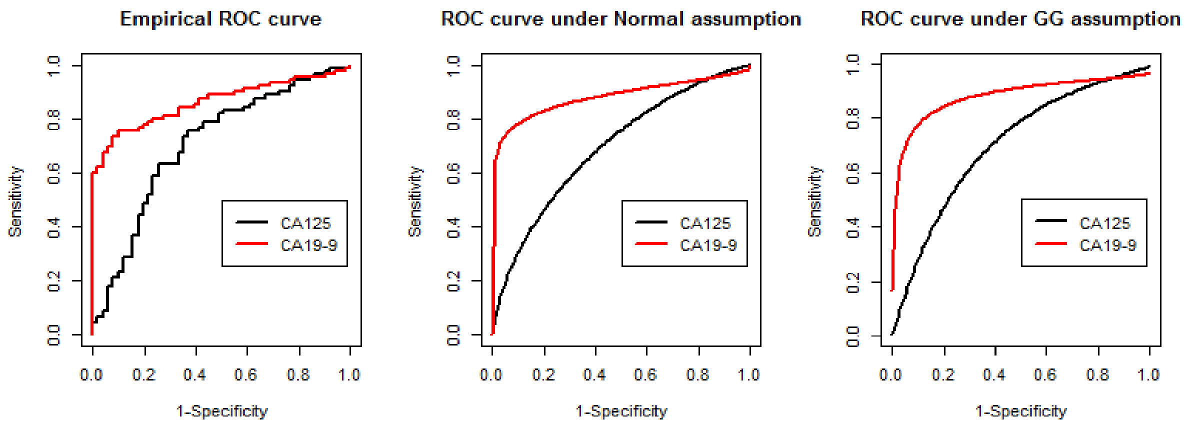

圖 2 兩種生物指標值之受試者操作特徵曲線

圖 2 由左到右分別為用無母數方法、經冪轉換後的常態分布下的有母數方法及用廣義伽瑪分布下的有母數方法所建構的 ROC 曲線。

分別根據無母數方法與二元常態分布之下的有母數方法檢定這筆資料中兩種生物指標值的 pAUC 值是否有異，即檢定統計假設(1.3)。根據 Shapiro-Wilk 的方法，檢定個別變數 X_1 、 X_2 、Y_1和Y_2是否服從常態分布，因其檢定的 p 值皆小於 0.0001，得知上述四個變數顯著的為非常態分布的變數。所以，本節利用此筆資料說明如何應用過去文獻所提的無母數 Bootstrap 方法、冪轉換後的二元常態分布下的有母數方法進行及本文提到二元廣義伽瑪分布下的有母數方法進行統計假設(1.3)的檢定。

令θ_1表示 CA125 的 pAUC 值，而θ_2表示 CA19-9 的 pAUC 值。假設在 $p=0.2$之下，$\delta_L=-0.02$ ，統計假設(1.3)可寫成

$$\mathrm{H_0}\colon\ \theta_1-\theta_2\le -0.02 \quad vs. \quad \mathrm{H_1}\colon\ \theta_1-\theta_2 > -0.02 \tag{5.1}$$

在 $p=0.1$之下，$\delta_L=-0.01$，統計假設(1.3)可寫成

$$\mathrm{H_0}\colon\ \theta_1-\theta_2\le -0.01 \quad vs. \quad \mathrm{H_1}\colon\ \theta_1-\theta_2 > -0.01 \tag{5.1}$$

根據李念純 (2011)的方法進行針對 X_1 、X_2 、Y_1 和 Y_2 配適邊際分布為廣義伽瑪分布的適合度檢定，其參數估計值與適合度檢定之 p 值整理如下：

變數	$\hat{\beta}\ (sd)$	$\hat{\sigma}\ (sd)$	$\hat{\lambda}\ (sd)$	p 值
X_1	2.846 (0.130)	0.781 (0.073)	-0.933 (0.246)	0.969
X_2	5.502 (0.483)	2.326 (0.174)	0.074 (0.358)	0.985
Y_1	2.146 (0.124)	0.404 (0.080)	-1.854 (0.569)	0.886
Y_1	1.920 (0.227)	0.586 (0.141)	-1.466 (0.691)	0.844

因此，可以合理地用廣義伽瑪分布配適這些變數的分布。此外，計算得知 (X_1, X_2) 和 (Y_1, Y_2) 的 Kendall's tau 估計值分別為 $\hat{\tau}_X = 0.070$ 和 $\hat{\tau}_Y = -0.096$。進一步根據李念純 (2011)所提的方法，進行針對 (X_1, X_2) 和 (Y_1, Y_2) 配適關聯結構函數的適合度檢定，分別檢定甘伯關聯結構、法蘭克關聯結構、這兩種關聯結構函數，其檢定之 p 值如下所示：

	甘伯關聯結構	法蘭克關聯結構
(X_1, X_2)	0.133	0.053
(Y_1, Y_2)	0.134	0.490

所以，(X_1, X_2) 的聯合分布可以由甘伯關聯結構函數聯結兩個邊際廣義伽瑪分布描述，而 (Y_1, Y_2) 的聯合分布可以由法蘭克關聯結構函數聯結兩個廣義伽瑪分布描述。所以 (X_1, X_2) 和 (Y_1, Y_2) 的聯合分布分別為

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=\frac{(-\ln u_1)^{\alpha-1}(-\ln v_1)^{\alpha-1}}{u_1v_1}\exp\left[-((-\ln u_1)^{\alpha}+(-\ln v_1)^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$
$$\times\left\{\left[(-\ln u_1)^{\alpha}+(-\ln v_1)^{\alpha}\right]^{2(\frac{1}{\alpha}-1)}-(1-\alpha)\left[(-\ln u_1)^{\alpha}+(-\ln v_1)^{\alpha}\right]^{(\frac{1}{\alpha}-2)}\right\}f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$$

和

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)=-\frac{\alpha e^{-\alpha u_2}e^{-\alpha v_2}(e^{-\alpha}-1)}{\left[(e^{-\alpha}-1)+(e^{-\alpha u_2}-1)(e^{-\alpha v_2}-1)\right]^2}f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$$

其中u_1、v_1為X_1、X_2的累積分布函數，u_2、v_2為Y_1、Y_2的累積分布函數。應用 R 統計軟體估計參數的最大概似估計量，將之代入(3.1)式，可求得 pAUC 之估計值。

將本文第二章及第三章的統計方法估計 pAUC 值整理如下：

p	0.2			0.1		
	NP	NT	GG	NP	NT	GG
CA125	0.0528	0.0574	0.0525	0.0161	0.0186	0.0147
CA19-9	0.1549	0.1534	0.1460	0.0802	0.0725	0.0648
$\theta_1-\theta_2$	-0.1021	-0.0960	-0.0935	-0.0640	-0.0539	-0.0501

將其 p 值整理如下：

p	0.2			0.1		
	NP	NT	GG	NP	NT	GG
p-value	0.9994	1.0000	0.9999	0.9964	0.9999	0.9998

上述統計數字中，雖然四種檢定方法得到的結論都相同，亦即資料並未提供顯著證據支持在偽陽率小於 0.1 及 0.2 時，CA125 的診斷準確率非劣於 CA19-9。

第六章　總結與討論

一般醫學診斷是根據受試者操作特徵曲線下面積或部分面積評估其準確性，因此，針對新的與標準的兩種診斷方法對應的部分面積進行非劣性檢定，藉以了解兩種診斷方法準確性的差異性。冪轉換法可能無法有效地將高度相關的成對右偏資料轉換為二元常態分布的變數，所以，本文並不建議使用。本文提出的在二元廣義伽瑪分布之下的有母數檢定方法，不僅能控制型Ⅰ誤差率在設定的顯著水準之下，且檢定力亦高於其它方法，所以，針對右偏分布資料而言，本文建議使用此一有母數方法進行兩種診斷方法準確性的相等性檢定。

本文考慮甘伯和法蘭克關聯結構函數，同時允許患病者和無病者接受兩種診斷方法的成對資料適用不同的關聯結構函數。但是，本文所提的有母數方法不限於此二函數。事實上，還有更多關聯結構函數可資應用。只要在實務上，有其適用的關聯結構函數，本文所提的有母數方法皆可推廣應用。

參考文獻

1. Li, C.R., Liao, C.T. and Liu, J.P.(2006) A non-inferiority test for diagnostic accuracy based on the paired partial areas under ROC curves. *Computational Statistics & Data Analysis.* **50**: 1855 – 1876.
2. Box, G.E.P. and Cox, D.R. (1964) An analysis of transformations. Journal of the Royal Statistical Society, Series B. 26:211-252.
3. Cox, C., Chu, H., Schneider, M.F. and Muñoz, A .(2007)Parametric survival analysis and taxonomy of hazard functions for the generalized gamma distribution. *Statistics in Medicine*. **26**:4352-4374.
4. DeLong, E., DeLong, D. and Clarke-Pearson, D.(1988) Comparing the areas under two or more correlated receiver operation characteristic curves: a non-parametric approach. *Biometrics*.**44**:837-845.
5. Faraggi, D. and Reiser, B.(2002) Estimation of the area under the ROC curve. *Statistics in Medicine.* **21**:3093-3106.
6. Greiner, M., Pfeiffer, D. and Smith, R.(2005) The partial area under the summary ROC curve. *Statistics in Medicine.* **24**: 2025–2040.
7. Liu, J.P., Ma, M.C., Wu, C.Y. and Tai, J.Y.(2006) Tests of equivalence and non-inferiority for diagnostic accuracy based on the paired areas under ROC curves. *Statistics in Medicine*. **25**:1219-1238.
8. Molodianovitch, K., Faraggi, D. and Reiser, B. (2006) Comparing the areas under two correlated ROC curves: parametric and non-parametric approaches. *Biometrical Journal*. **48**: 745–757
9. Nelsen, R.B.(2006) *An Introduction to Copulas. Second Edition.* Springer: New York.
10. Stacy, E.(1962) A generalization of the gamma distribution. *Annals of Mathematical Statistics.* **33**:1187-1192.
11. McClish, D.K.(1989) Analyzing a portion of the ROC curve. *Medical Decision Making*.**9**:190–195.
12. Wieand, S., Gail, M.H., James, B.R. and James, K.L.(1989) A family of non-parametric statistics for comparing diagnostic markers with paired or unpaired data. *Biometrika*. **76**:585-592.
13. Zhou, X.H., Obuchowski, N.A., and McClish, D.K.(2002) *Statistical Methods in Diagnostic Medicine.* Wiley: New York.
14. Pepe, M.S.(2003) *The Statistical Evaluation of Medical Tests for Classification and Prediction.* Oxford University Press:New York.
15. 陳秀琴 (2011). 針對右偏分布資料進行兩個醫學診斷方法之相等性檢定。國立中央大學統計研究所碩士論文。

16. 李念純 (2011). 一維及二維右設限存活資料的適合度檢定。國立中央大學統計研究所碩士論文。

附錄

以下所求者是在各種廣義伽瑪分布之下，一種醫學診斷方法的 pAUC 值。

1. 指數分布

$X \sim Exp\left(\lambda_X\right)$，$Y \sim Exp\left(\lambda_Y\right)$，$X$ 和 Y 之間互相獨立。

則 $p = FPR(c) = e^{-\frac{c}{\lambda_Y}}$，$c = -\lambda_Y \log(p)$，

$$ROC(p) = \text{TPF}(c) = P(X \geq c) = e^{\frac{\lambda_Y \log(p)}{\lambda_X}} = p^{\frac{\lambda_Y}{\lambda_X}}$$

$$\begin{aligned} pAUC(p) &= \int_0^p ROC(t)dt \\ &= \int_0^p t^{\frac{\lambda_Y}{\lambda_X}} dt \\ &= \frac{\lambda_X}{\lambda_X + \lambda_Y} p^{\frac{\lambda_X + \lambda_Y}{\lambda_X}} \end{aligned}$$

2. 韋柏分布

$X \sim Weibull\left(\beta_X,\alpha_X\right)$，$Y \sim Weibull\left(\beta_Y,\alpha_Y\right)$，$X$和$Y$之間互相獨立。

則 $p = FPR(c) = \exp(-(\frac{c}{\beta_X})^{\alpha_X})$，$c = \beta_Y(-\log(p))^{\frac{1}{\alpha_Y}}$，

$$ROC(p) = \mathrm{TPF}(c) = P(X \geq c) = \exp(-(\frac{\beta_Y(-\log(p))^{\frac{1}{\alpha_Y}}}{\beta_X})^{\alpha_X})$$

$$pAUC(p) = \int_0^p ROC(t)dt$$

$$= \int_0^p \exp(-(\frac{\beta_Y(-\log(t))^{\frac{1}{\alpha_Y}}}{\beta_X})^{\alpha_X})dt$$

假設形狀參數皆相同，$\alpha_X = \alpha_Y = \alpha$，pAUC 可進一步簡化為

$$pAUC(p) = \int_0^p ROC(t)dt$$

$$= \int_0^p \exp(\frac{\beta_Y^\alpha \log(t)}{\beta_X^\alpha})dt$$

$$= \int_0^p t^{\frac{\beta_Y^\alpha}{\beta_X^\alpha}} dt$$

$$= \frac{\beta_X^\alpha}{\beta_X^\alpha + \beta_Y^\alpha} p^{\frac{\beta_X^\alpha + \beta_Y^\alpha}{\beta_X^\alpha}}$$

3. 伽瑪分布

$X \sim Gamma\left(\alpha_X, \beta_X\right)$，$Y \sim Gamma\left(\alpha_Y, \beta_Y\right)$，$X$ 和 Y 之間互相獨立。

令 c^* 滿足 $p = FPR(c^*) = S_Y(c^*)$， 則

$$
\begin{aligned}
pAUC(p) &= P\{X > Y, Y > c^*\} \\
&= \int_{c^*}^{\infty}\int_{c^*}^{x} f_X(x) f_Y(y) dy dx \\
&= \int_{c^*}^{\infty} f_X(x)[F_Y(x) - F_Y(c^*)]dx \\
&= \int_{c^*}^{\infty} f_X(x)F_Y(x)dx - F_Y(c^*)\int_{c^*}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= \int_{c^*}^{\infty} f_X(x)F_Y(x)dx - F_Y(c^*)S_X(c^*) \\
&= \int_{c^*}^{\infty} f_X(x)[1 - S_Y(x)]dx - F_Y(c^*)S_X(c^*) \\
&= S_X(c^*) - \int_{c^*}^{\infty} f_X(x)S_Y(x)dx - F_Y(c^*)S_X(c^*) \\
&= S_X(c^*)S_Y(c^*) - \int_{c^*}^{\infty} f_X(x)S_Y(x)dx \quad \text{......(1)} \\
&= p\left(\sum_{k=0}^{\alpha_X - 1} \frac{\left(\frac{c^*}{\beta_X}\right)^k \exp\left(-\frac{c^*}{\beta_X}\right)}{k!}\right) - \int_{c^*}^{\infty} f_X(x) \sum_{k=0}^{\alpha_Y - 1} \frac{\left(\frac{x}{\beta_Y}\right)^k \exp\left(-\frac{x}{\beta_Y}\right)}{k!} dx \\
&= p\left(\sum_{k=0}^{\alpha_X - 1} \frac{\left(\frac{c^*}{\beta_X}\right)^k \exp\left(-\frac{c^*}{\beta_X}\right)}{k!}\right) - \int_{c^*}^{\infty} \frac{x^{(\alpha_X - 1)} \exp\left(-\frac{x}{\beta_X}\right)}{\Gamma(\alpha_X)(\beta_X)^{\alpha_X}} \sum_{k=0}^{\alpha_Y - 1} \frac{\left(\frac{x}{\beta_Y}\right)^k \exp\left(-\frac{x}{\beta_Y}\right)}{k!} dx
\end{aligned}
$$

表一 (X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2)在不同關聯結構聯結的二元指數分布之下，非劣性檢定的型Ⅰ誤差率估計值

（a）(X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2)均由甘伯關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0565	0.0415	0.0485	0.0445	0.0495	0.0530
		NP	0.0230	0.0185	0.0325	0.0085	0.0125	0.0165
		GG	**0.0610**	0.0490	0.0580	0.0555	0.0585	0.0550
	(0.2, 0)	**NT**	0.0490	0.0480	0.0555	0.0510	0.0435	0.0485
		NP	0.0150	0.0225	0.0275	0.0050	0.0085	0.0165
		GG	0.0575	**0.0620**	0.0600	**0.0615**	0.0565	0.0540
	(0.5, 0)	**NT**	0.0600	0.0475	0.0485	0.0495	0.0495	0.0495
		NP	0.0175	0.0195	0.0260	0.0040	0.0110	0.0105
		GG	**0.0630**	**0.0625**	0.0530	0.0590	**0.0610**	0.0520
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0500	0.0370	0.0375	0.0260	0.0310	0.0365
		NP	0.0075	0.0120	0.0190	0.0005	0.0040	0.0045
		GG	0.0600	0.0540	0.0575	**0.0620**	0.0600	**0.0610**

粗體：型Ⅰ誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表一

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0440	0.0460	0.0520	0.0585	0.0385	0.0530
		NP	0.0140	0.0230	0.0235	0.0040	0.0095	0.0110
		GG	0.0510	0.0590	0.0565	0.0600	0.0555	0.0550
	(0.2, 0)	**NT**	0.0465	0.0510	0.0485	0.0465	0.0370	0.0555
		NP	0.0120	0.0200	0.0540	0.0055	0.0060	0.0145
		GG	0.0580	**0.0610**	0.0210	0.0595	0.0500	0.0580
	(0.5, 0)	**NT**	0.0560	0.0520	0.0475	0.0470	0.0465	0.0545
		NP	0.0065	0.0130	0.0230	0.0045	0.0100	0.0130
		GG	0.0600	0.0590	0.0585	0.0600	0.0595	**0.0610**
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0365	0.0365	0.0390	0.0385	0.0285	0.0305
		NP	0.0015	0.0080	0.0150	0.0005	0.0040	0.0055
		GG	0.0515	0.0575	0.0595	0.0575	0.0560	0.0535

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表一

			$p = 0.2$			$p = 0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0500	0.0460	0.0495	0.0475	0.0380	0.0560
		NP	0.0310	0.0255	0.0330	0.0185	0.0165	0.0230
		GG	0.0600	0.0485	0.0495	0.0570	0.0460	0.0550
	(0.2, 0)	**NT**	0.0455	0.0410	0.0480	0.0375	0.0410	0.0495
		NP	0.0280	0.0275	0.0335	0.0100	0.0230	0.0230
		GG	0.0535	0.0530	0.0525	0.0495	0.0545	0.0480
	(0.5, 0)	**NT**	**0.0635**	0.0415	0.0505	0.0415	0.0390	0.0480
		NP	0.0260	0.0240	0.0350	0.0120	0.0135	0.0180
		GG	0.0600	0.0490	0.0580	0.0560	0.0495	0.0585
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0455	0.0320	0.0320	0.0365	0.0300	0.0300
		NP	0.0200	0.0260	0.0235	0.0060	0.0105	0.0110
		GG	0.0555	0.0550	0.0490	0.0600	0.0550	0.0500

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

（b）(X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2)均由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0455	0.0540	0.0445	0.0485	0.0495	0.0530
		NP	0.0185	0.0240	0.0260	0.0080	0.0135	0.0215
		GG	0.0540	**0.0615**	0.0490	**0.0630**	0.0575	0.0545
	(0.2, 0)	**NT**	0.0440	0.0455	0.0405	0.0390	0.0425	0.0435
		NP	0.0155	0.0235	0.0195	0.0030	0.0100	0.0140
		GG	0.0525	0.0565	0.0435	0.0575	**0.0610**	0.0455
	(0.5, 0)	**NT**	0.0405	0.0380	0.0435	0.0380	0.0445	0.0460
		NP	0.0120	0.0160	0.0225	0.0020	0.0085	0.0125
		GG	**0.0615**	0.0560	0.0485	0.0535	**0.0625**	0.0555
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0430	0.0440	0.0560	0.0425	0.0420	0.0475
		NP	0.0085	0.0135	0.0230	0.0035	0.0080	0.0095
		GG	0.0580	**0.0625**	0.0550	**0.0630**	0.0545	0.0555

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表一

			$p = 0.2$			$p = 0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	方法	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0455	0.0380	0.0510	0.0465	0.0470	0.0520
		NP	0.0590	0.0135	0.0235	0.0050	0.0115	0.0125
		GG	0.0115	0.0465	0.0540	0.0570	0.0550	0.0500
	(0.2, 0)	**NT**	0.0400	0.0425	0.0535	0.0405	0.0505	0.0440
		NP	0.0050	0.0175	0.0235	0.0025	0.0105	0.0070
		GG	**0.0605**	0.0570	0.0555	0.0580	0.0545	0.0490
	(0.5, 0)	**NT**	0.0440	0.0515	0.0500	0.0355	0.0410	0.0435
		NP	0.0080	0.0230	0.0200	0.0015	0.0035	0.0105
		GG	**0.0615**	0.0600	0.0560	**0.0610**	**0.0625**	0.0575
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0330	0.0380	0.0570	0.0445	0.0380	0.0500
		NP	0.0025	0.0080	0.0210	0.0015	0.0020	0.0080
		GG	0.0550	0.0460	0.0545	**0.0620**	0.0430	0.0510

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表一

			$p = 0.2$			$p = 0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0450	0.0445	0.0530	0.0385	0.0430	0.0435
		NP	0.0275	0.0350	0.0395	0.0150	0.0210	0.0180
		GG	0.0535	0.0580	0.0595	0.0385	0.0565	0.0435
	(0.2, 0)	**NT**	0.0420	0.0440	0.0545	0.0440	0.0355	0.0600
		NP	0.0255	0.0300	0.0375	0.0160	0.0160	0.0285
		GG	0.0565	0.0565	**0.0620**	0.0580	0.0470	**0.0610**
	(0.5, 0)	**NT**	0.0400	0.0285	0.0475	0.0390	0.0335	0.0465
		NP	0.0205	0.0200	0.0375	0.0100	0.0140	0.0170
		GG	0.0550	0.0480	0.0545	0.0585	0.0495	0.0455
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0440	0.0275	0.0535	0.0385	0.0405	0.0555
		NP	0.0210	0.0235	0.0320	0.0040	0.0185	0.0180
		GG	0.0575	0.0445	0.0565	0.0535	0.0540	0.0530

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

（c）(X_1, X_2) 由甘伯關聯結構聯結，(Y_1, Y_2) 由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0580	0.0475	0.0520	0.0460	0.0530	0.0465
		NP	0.0175	0.0240	0.0265	0.0080	0.0145	0.0185
		GG	**0.0625**	0.0560	0.0535	0.0530	**0.0630**	0.0535
	(0.2, 0)	**NT**	0.0420	0.0455	0.0455	0.0390	0.0420	0.0485
		NP	0.0150	0.0210	0.0245	0.0065	0.0070	0.0145
		GG	0.0510	0.0550	0.0535	0.0520	0.0595	0.0490
	(0.5, 0)	**NT**	0.0440	0.0510	0.0435	0.0425	0.0420	0.0475
		NP	0.0100	0.0155	0.0245	0.0015	0.0085	0.0120
		GG	0.0565	0.0575	0.0495	**0.0610**	0.0505	0.0515
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0620**	0.0515	0.0555	0.0455	0.0450	0.0480
		NP	0.0045	0.0120	0.0300	0.0030	0.0065	0.0125
		GG	**0.0630**	0.0545	0.0600	0.0465	**0.0605**	0.0535

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表一

(m,n)	(τ_X, τ_Y)	方法	$p = 0.2$			$p = 0.1$		
			θ_2					
			0.14	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0425	0.0425	0.0440	0.0380	0.0440	0.0460
		NP	0.0105	0.0540	0.0230	0.0065	0.0120	0.0075
		GG	0.0540	0.0185	0.0455	0.0450	0.0515	0.0476
	(0.2, 0)	**NT**	0.0505	0.0520	0.0465	0.0450	0.0385	0.0430
		NP	0.0100	0.0185	0.0195	0.0025	0.0045	0.0130
		GG	0.0600	0.0580	0.0585	0.0555	0.0490	0.0535
	(0.5, 0)	**NT**	0.0500	0.0350	0.0485	0.0570	0.0415	0.0490
		NP	0.0055	0.0180	0.0210	0.0025	0.0050	0.0105
		GG	0.0575	0.0525	0.0550	**0.0625**	0.0560	0.0535
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0605**	0.0465	0.0530	0.0430	0.0495	0.0470
		NP	0.0060	0.0110	0.0225	0.0005	0.0060	0.0050
		GG	0.0580	0.0535	0.0600	0.0530	0.0550	0.0565

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表一

			$p = 0.2$			$p = 0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0335	0.0330	0.0530	0.0505	0.0410	0.0505
		NP	0.0240	0.0230	0.0400	0.0210	0.0230	0.0190
		GG	0.0470	0.0435	0.0520	**0.0615**	0.0520	0.0515
	(0.2, 0)	**NT**	0.0440	0.0450	0.0465	0.0465	0.0425	0.0435
		NP	0.0240	0.0325	0.0290	0.0115	0.0175	0.0255
		GG	0.0500	0.0535	0.0515	0.0555	0.0545	0.0465
	(0.5, 0)	**NT**	0.0525	0.0405	0.0410	0.0475	0.0325	0.0465
		NP	0.0230	0.0260	0.0250	0.0070	0.0135	0.0175
		GG	0.0595	0.0500	0.0490	0.0575	0.0455	0.0540
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0625**	0.0470	0.0405	0.0425	0.0465	0.0405
		NP	0.0180	0.0250	0.0295	0.0085	0.0140	0.0200
		GG	0.0600	0.0555	0.0445	0.0495	0.0505	0.0415

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

表二 (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2) 在不同關聯結構聯結的二元韋柏分布之下，非劣性檢定的型 I 誤差率估計值

(a) (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2) 均由甘伯關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	**0.0835**	0.0505	0.0530	0.0565	0.0480	0.0590
		NP	0.0180	0.0215	0.0275	0.0090	0.0180	0.0220
		GG	**0.0610**	0.0585	0.0555	0.0510	0.0470	**0.0605**
	(0.2, 0)	**NT**	**0.1215**	0.0540	0.0515	**0.0705**	0.0570	0.0555
		NP	0.0170	0.0255	0.0235	0.0030	0.0130	0.0165
		GG	0.0560	0.0545	0.0495	0.0535	**0.0705**	0.0555
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1000**	0.0450	0.0490	**0.0655**	0.0455	0.0510
		NP	0.0125	0.0175	0.0215	0.0055	0.0080	0.0145
		GG	0.0535	0.0580	0.0635	**0.0620**	0.0510	0.0535
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0945**	0.0410	0.0440	**0.0690**	0.0255	0.0360
		NP	0.0075	0.0180	0.0205	0.0020	0.0020	0.0090
		GG	**0.0640**	**0.0635**	**0.0645**	**0.0680**	0.0525	0.0585

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表二

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0590	0.0510	0.0435	0.0480	0.0455	0.0505
		NP	0.0105	0.0185	0.0205	0.0545	0.0090	0.0120
		GG	0.0575	0.0585	0.0455	0.0025	0.0515	0.0525
	(0.2, 0)	**NT**	**0.0975**	0.0475	0.0530	**0.0660**	0.0465	0.0490
		NP	0.0100	0.0185	0.0220	0.0035	0.0060	0.0060
		GG	0.0580	0.0560	0.0580	0.0505	0.0590	0.0455
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1370**	0.0595	0.0510	**0.0935**	0.0510	0.0580
		NP	0.0070	0.0180	0.0225	0.0025	0.0080	0.0140
		GG	**0.0690**	**0.0625**	0.0500	**0.0640**	0.0565	0.0515
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.1245**	0.0385	0.0335	**0.0835**	0.0280	0.0405
		NP	0.0045	0.0130	0.0095	0.0005	0.0005	0.0060
		GG	**0.0655**	0.0600	0.0475	**0.0630**	0.0580	**0.0610**

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表二

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	**0.1105**	0.0395	0.0590	0.0575	0.0380	0.0565
		NP	0.0290	0.0285	0.0435	0.0140	0.0190	0.0265
		GG	0.0490	0.0410	0.0555	0.0425	0.0455	0.0535
	(0.2, 0)	**NT**	**0.1795**	0.0515	0.0560	**0.1105**	0.0475	0.0485
		NP	0.0260	0.0395	0.0405	0.0115	0.0230	0.0205
		GG	0.0500	0.0575	0.0590	0.0475	0.0580	0.0485
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1385**	0.0465	0.0540	**0.0930**	0.0555	0.0440
		NP	0.0215	0.0325	0.0330	0.0115	0.0160	0.0160
		GG	0.0550	0.0555	0.0550	0.0600	0.0545	0.0490
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.1290**	0.0395	0.0375	**0.0915**	0.0300	0.0350
		NP	0.0195	0.0235	0.0220	0.0035	0.0125	0.0090
		GG	0.0565	0.0540	0.0500	0.0570	0.0495	0.0450

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

(b) (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2) 均由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	**0.0835**	0.0515	0.0530	0.0580	0.0490	0.0465
		NP	0.0175	0.0255	0.0310	0.0095	0.0115	0.0135
		GG	**0.0625**	**0.0665**	0.0540	0.0555	0.0525	0.0555
	(0.2, 0)	**NT**	**0.1085**	0.0505	0.0500	**0.0650**	0.0425	0.0585
		NP	0.0180	0.0240	0.0250	0.0055	0.0095	0.0135
		GG	**0.0615**	**0.0640**	0.0520	0.0475	0.0475	0.0540
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1230**	0.0440	0.0545	**0.0805**	0.0455	0.0440
		NP	0.0105	0.0200	0.0250	0.0035	0.0115	0.0075
		GG	**0.0625**	0.0520	0.0570	0.0595	0.0540	0.0465
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.1345**	0.0435	0.0600	**0.0770**	0.0440	0.0535
		NP	0.0100	0.0140	0.0215	0.0020	0.0060	0.0115
		GG	0.0570	0.0540	**0.0675**	0.0555	0.0535	0.0595

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表二

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0590	0.0355	0.0475	0.0540	0.0460	0.0450
		NP	0.0140	0.0155	0.0220	0.0025	0.0105	0.0095
		GG	0.0600	0.0455	0.0525	0.0550	0.0560	0.0495
	(0.2, 0)	**NT**	**0.0925**	0.0380	0.0420	0.0520	0.0495	0.0510
		NP	0.0115	0.0155	0.0165	0.0030	0.0085	0.0105
		GG	0.0590	0.0515	0.0490	0.0570	0.0600	0.0500
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1800**	0.0430	0.0410	**0.1005**	0.0495	0.0590
		NP	0.0075	0.0180	0.0230	0.0005	0.0090	0.0150
		GG	**0.0615**	0.0580	0.0410	0.0550	0.0580	0.0540
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.1925**	0.0445	0.0485	**0.1130**	0.0430	0.0550
		NP	0.0030	0.0110	0.0180	0.0015	0.0535	0.0090
		GG	0.0500	0.0530	0.0530	0.0575	0.0025	0.0575

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表二

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	**0.1275**	0.0555	0.0455	0.0550	0.0425	0.0495
		NP	0.0290	0.0380	0.0305	0.0150	0.0175	0.0200
		GG	0.0545	0.0585	0.0500	0.0440	0.0530	0.0470
	(0.2, 0)	**NT**	**0.1900**	0.0455	0.0545	**0.1060**	0.0400	0.0450
		NP	0.0240	0.0320	0.0330	0.0155	0.0180	0.0220
		GG	0.0490	0.0505	0.0530	0.0595	0.0535	0.0455
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1710**	0.0405	0.0485	**0.1200**	0.0375	0.0460
		NP	0.0190	0.0325	0.0270	0.0065	0.0155	0.0190
		GG	0.0535	0.0405	0.0435	0.0475	0.0510	0.0415
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.1635**	0.0500	0.0500	**0.1195**	0.0370	0.0510
		NP	0.0215	0.0310	0.0245	0.0120	0.0100	0.0200
		GG	0.0590	0.0580	0.0475	0.0595	0.0400	0.0420

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

（c）(X_1, X_2) 由甘伯關聯結構聯結，(Y_1, Y_2) 由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	**0.8900**	0.0510	0.0445	**0.0625**	0.0460	0.0490
		NP	0.0205	0.0255	0.0205	0.0080	0.0120	0.0110
		GG	**0.0620**	0.0550	0.0495	0.0535	**0.0630**	0.0530
	(0.2, 0)	**NT**	**0.1210**	0.0510	0.0495	**0.0740**	0.0495	0.0505
		NP	0.0180	0.0230	0.0260	0.0105	0.0120	0.0205
		GG	**0.0635**	0.0510	0.0545	0.0580	0.0580	**0.0645**
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1090**	0.0550	0.0440	**0.0785**	0.0415	0.0535
		NP	0.0080	0.0145	0.0150	0.0040	0.0060	0.0095
		GG	0.0570	0.0575	0.0520	0.0575	0.0545	0.0535
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0990**	0.0500	0.0460	**0.0680**	0.0575	0.0565
		NP	0.0800	0.0155	0.0200	0.0020	0.0090	0.0115
		GG	0.0590	0.0530	0.0560	0.0490	**0.0620**	0.0575

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表二

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	**0.0645**	0.0425	0.0595	0.0445	0.0490	0.0530
		NP	0.0130	0.0115	0.0300	0.0025	0.0110	0.0110
		GG	0.0575	0.0470	**0.0625**	0.0560	0.0550	0.0600
	(0.2, 0)	**NT**	**0.0940**	0.0480	0.0505	**0.0655**	0.0565	0.0500
		NP	0.0115	0.0185	0.0260	0.0020	0.0100	0.0105
		GG	0.0490	0.0590	0.0550	0.0515	0.0570	0.0535
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1490**	0.0445	0.0540	**0.0935**	0.0535	0.0440
		NP	0.0090	0.0090	0.0230	0.0020	0.0060	0.0090
		GG	**0.0610**	0.0465	0.0595	**0.0630**	0.0545	0.0505
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.1420**	0.0535	0.0530	**0.0845**	0.0415	0.0515
		NP	0.0005	0.0115	0.0200	0.0015	0.0025	0.0110
		GG	0.0595	**0.0625**	0.0595	**0.0615**	0.0495	0.0515

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表二

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	**0.1255**	0.0400	0.0520	**0.0685**	0.0395	0.0550
		NP	0.0350	0.0275	0.0290	0.0170	0.0220	0.0255
		GG	0.0600	0.0480	0.0515	0.0530	0.0500	0.0560
	(0.2, 0)	**NT**	**0.1820**	0.0365	0.0430	**0.1020**	0.0495	0.0535
		NP	0.0275	0.0245	0.0280	0.0145	0.0225	0.0205
		GG	**0.0610**	0.0495	0.0445	0.0545	0.0545	0.0575
	(0.5, 0)	**NT**	**0.1550**	0.0510	0.0475	**0.0995**	0.0435	0.0470
		NP	0.0235	0.0250	0.0265	0.0080	0.0210	0.0140
		GG	0.0595	0.0555	0.0470	0.0550	0.0535	0.0460
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.1360**	0.0480	0.0535	**0.0775**	0.0515	0.0545
		NP	0.0245	0.0200	0.0265	0.0095	0.0120	0.0180
		GG	0.0590	0.0540	0.0545	0.0450	0.0555	0.0475

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

表三 (X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2)在不同關聯結構聯結的的二元廣義伽瑪分布之下，非劣性檢定的型Ⅰ誤差率估計值

(a) (X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2)均由甘伯關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0305	0.0315	0.0500	0.0285	0.0350	0.0590
		NP	0.0185	0.0200	0.0275	0.0060	0.0160	0.0155
		GG	0.0405	0.0530	0.0460	0.0505	0.0525	0.0540
	(0.2, 0)	**NT**	0.0325	0.0285	0.0500	0.0230	0.0290	0.0520
		NP	0.0180	0.0525	0.0335	0.0060	0.0115	0.0165
		GG	0.0520	0.0215	0.0500	0.0505	0.0500	0.0465
	(0.5, 0)	**NT**	0.0335	0.0190	0.0415	0.0185	0.0230	0.0530
		NP	0.0050	0.0115	0.0170	0.0010	0.0045	0.0065
		GG	0.0400	0.0515	0.0515	0.0480	0.0540	0.0575
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0310	0.0145	0.0395	0.0165	0.0160	0.0600
		NP	0.0065	0.0075	0.0220	0.0025	0.0045	0.0070
		GG	0.0395	0.0440	0.0540	0.0390	0.0460	0.0600

粗體：型Ⅰ誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表三

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0230	0.0230	0.0585	0.0220	0.0255	**0.0690**
		NP	0.0055	0.0115	0.0200	0.0010	0.0060	0.0105
		GG	0.0400	0.0485	0.0505	0.0495	0.0540	0.0575
	(0.2, 0)	**NT**	0.0165	0.0170	0.0520	0.0145	0.0250	**0.0670**
		NP	0.0035	0.0130	0.0190	0.0015	0.0030	0.0090
		GG	0.0460	0.0485	0.0530	0.0525	0.0565	0.0580
	(0.5, 0)	**NT**	0.0400	0.0110	0.0525	0.0100	0.0175	0.0465
		NP	0.0025	0.0055	0.0195	0.0020	0.0000	0.0025
		GG	0.0540	0.0460	0.0470	0.0545	**0.0605**	0.0.535
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0240	0.0120	0.0495	0.0125	0.0115	0.0555
		NP	0.0025	0.0085	0.0540	0.0000	0.0015	0.0020
		GG	0.0435	0.0480	0.0155	0.0505	0.0530	0.0570

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表三

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0285	0.0360	0.0560	0.0495	0.0355	**0.0765**
		NP	0.0305	0.0395	0.0315	0.0120	0.0220	0.0170
		GG	0.0480	**0.0615**	0.0430	0.0530	0.0530	0.0470
	(0.2, 0)	**NT**	0.0205	0.0170	**0.0730**	0.0280	0.0230	**0.0800**
		NP	0.0150	0.0295	0.0400	0.0125	0.0165	0.0230
		GG	0.0435	0.0515	0.0540	0.0530	0.0515	0.0600
	(0.5, 0)	**NT**	**0.0750**	0.0150	**0.0680**	0.0105	0.0225	**0.0740**
		NP	0.0160	0.0215	0.0290	0.0050	0.0115	0.0175
		GG	0.0575	0.0510	0.0470	0.0560	**0.0615**	0.0575
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0725**	0.0090	**0.0605**	0.0135	0.0170	**0.0765**
		NP	0.0170	0.0180	0.0265	0.0035	0.0065	0.0145
		GG	0.0465	0.0545	0.0560	**0.0610**	0.0540	0.0590

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

(b) (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2)均由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0355	0.0280	**0.0625**	0.0325	0.0315	**0.0620**
		NP	0.0215	0.0220	0.0270	0.0085	0.0110	0.0140
		GG	0.0485	0.0550	0.0585	0.0505	0.0475	0.0505
	(0.2, 0)	**NT**	0.0360	0.0250	0.0565	0.0245	0.0315	**0.0625**
		NP	0.0135	0.0180	0.0300	0.0055	0.0120	0.0140
		GG	0.0555	0.0485	0.0580	0.0440	0.0485	0.0545
	(0.5, 0)	**NT**	0.0470	0.0160	**0.0635**	0.0130	0.0200	**0.0625**
		NP	0.0035	0.0170	0.0250	0.0020	0.0025	0.0095
		GG	0.0415	0.0550	0.0590	0.0440	0.0515	0.0555
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0450	0.0175	0.0565	0.0160	0.0220	**0.0700**
		NP	0.0040	0.0105	0.0210	0.0005	0.0045	0.0090
		GG	0.0415	0.0480	0.0535	0.0425	0.0495	0.0545

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表三

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0210	0.0215	0.0515	0.0270	0.0315	**0.0680**
		NP	0.0025	0.0145	0.0155	0.0025	0.0070	0.0090
		GG	0.0400	0.0465	0.0500	0.0525	0.0560	0.0475
	(0.2, 0)	**NT**	0.0200	0.0185	0.0520	0.0180	0.0255	**0.0615**
		NP	0.0010	0.0105	0.0210	0.0005	0.0030	0.0110
		GG	0.0415	0.0515	0.0515	0.0430	0.0590	0.0570
	(0.5, 0)	**NT**	0.0380	0.0110	0.0510	0.0135	0.0160	0.0525
		NP	0.0020	0.0055	0.0190	0.0000	0.0000	0.0060
		GG	0.0465	0.0510	0.0540	0.0460	0.0565	0.0455
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0305	0.0125	**0.0630**	0.0165	0.0190	**0.0685**
		NP	0.0005	0.0050	0.0215	0.0000	0.0010	0.0040
		GG	0.0405	0.0485	0.0575	0.0475	0.0490	0.0510

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表三

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0265	0.0225	**0.0725**	0.0485	0.0315	**0.0790**
		NP	0.0255	0.0315	0.0300	0.0135	0.0230	0.0200
		GG	0.0435	0.0515	0.0555	0.0515	0.0560	0.0490
	(0.2, 0)	**NT**	0.0180	0.0165	**0.0625**	0.0290	0.0220	**0.0795**
		NP	0.0195	0.0295	0.0310	0.0100	0.0155	0.0145
		GG	0.0460	0.0560	0.0500	0.0525	0.0480	0.0475
	(0.5, 0)	**NT**	**0.0760**	0.0125	**0.0800**	0.0200	0.0155	**0.0890**
		NP	0.0145	0.0230	0.0350	0.0045	0.0100	0.0220
		GG	0.0480	0.0565	0.0585	0.0545	0.0465	**0.0610**
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0790**	0.0105	**0.0755**	0.0210	0.0165	**0.0975**
		NP	0.0140	0.0200	0.0275	0.0025	0.0090	0.0185
		GG	0.0450	0.0525	0.0540	0.0440	0.0520	0.0575

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

（c）(X_1, X_2) 由甘伯關聯結構聯結，(Y_1, Y_2) 由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0300	0.0350	0.0575	0.0300	0.0375	**0.0615**
		NP	0.0180	0.0300	0.0275	0.0065	0.0150	0.0105
		GG	0.0415	0.0475	0.0480	0.0495	**0.0630**	0.0450
	(0.2, 0)	**NT**	0.0285	0.0235	0.0560	0.0275	0.0240	0.0600
		NP	0.0145	0.0160	0.0280	0.0055	0.0085	0.0105
		GG	0.0395	0.0460	**0.0615**	0.0475	0.0530	0.0530
	(0.5, 0)	**NT**	0.0385	0.0155	0.0545	0.0175	0.0150	0.0520
		NP	0.0065	0.0125	0.0215	0.0020	0.0040	0.0080
		GG	0.0415	0.0510	0.0560	0.0485	0.0455	0.0500
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0370	0.0175	0.0590	0.0195	0.01758	**0.0645**
		NP	0.0065	0.0100	0.0230	0.0000	0.0055	0.0075
		GG	0.0370	0.0500	0.0550	0.0455	0.0520	0.0590

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表三

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0205	0.0195	0.0580	0.0255	0.0320	**0.0640**
		NP	0.0065	0.0150	0.0250	0.0020	0.0060	0.0095
		GG	0.0415	0.0420	0.0500	0.0495	0.0545	0.0490
	(0.2, 0)	**NT**	0.0170	0.0170	0.0545	0.0170	0.0250	**0.0640**
		NP	0.0020	0.0100	0.0215	0.0010	0.0035	0.0065
		GG	0.0400	0.0515	0.0535	0.0590	0.0555	0.0520
	(0.5, 0)	**NT**	0.0205	0.0130	0.0475	0.0135	0.0210	0.0510
		NP	0.0000	0.0090	0.0150	0.0000	0.0015	0.0050
		GG	0.0490	0.0525	0.0525	0.0570	**0.0630**	0.0530
	(0.5,0.2)	**NT**	0.0255	0.0150	0.0525	0.0125	0.0165	**0.0695**
		NP	0.0025	0.0040	0.0145	0.0010	0.0010	0.0060
		GG	0.0450	0.0480	0.0485	0.0495	0.0510	0.0595

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

續表三

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.0310	0.0395	**0.0755**	0.0485	0.0350	**0.0845**
		NP	0.0265	0.0335	0.0355	0.0135	0.0230	0.0240
		GG	0.0510	**0.0610**	0.0485	0.0400	0.575	0.0565
	(0.2, 0)	**NT**	0.0300	0.0170	**0.0700**	0.0245	0.0195	**0.0730**
		NP	0.0235	0.0260	0.0390	0.0085	0.0130	0.0160
		GG	0.0530	0.0550	0.0585	0.0470	0.0485	0.0490
	(0.5, 0)	**NT**	**0.0815**	0.0125	**0.0705**	0.0130	0.0190	**0.0750**
		NP	0.0170	0.0190	0.0315	0.0020	0.0080	0.0120
		GG	0.0525	0.0485	**0.0610**	0.0440	0.0505	0.0515
	(0.5,0.2)	**NT**	**0.0855**	0.0175	**0.0750**	0.0095	0.0175	**0.0820**
		NP	0.0135	0.0245	0.0325	0.0030	0.0110	0.0150
		GG	0.0450	0.0555	0.0600	0.0470	0.0595	0.0535

粗體：型 I 誤差率估計值與顯著水準 0.05 超出兩倍標準差

表四(X_1,X_2)、(Y_1,Y_2)由不同關聯結構聯結的二元指數分布之下，非劣性檢定的檢定力估計值

（a）(X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2)均由甘伯關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	方法	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.1880	0.1860	0.1725	0.1355	0.1520	0.1495
		NP	0.0770	0.1950	0.1055	0.0315	0.0600	0.0630
		GG	0.2030	0.1055	0.1740	0.1495	0.1570	0.1580
	(0.2, 0)	**NT**	0.2005	0.1660	0.1935	0.1515	0.1440	0.1630
		NP	0.0600	0.0845	0.1120	0.0310	0.1670	0.0625
		GG	0.2275	0.1970	0.2125	0.1795	0.0400	0.1710
	(0.5, 0)	**NT**	0.2830	0.2200	0.2185	0.2045	0.1780	0.2035
		NP	0.0770	0.0955	0.1250	0.0175	0.0440	0.0610
		GG	0.3005	0.2545	0.2420	0.2380	0.1920	0.2235
	(0.5,0.2)	**NT**	0.2925	0.2335	0.2230	0.2055	0.1605	0.1875
		NP	0.0600	0.0970	0.1230	0.0165	0.0280	0.0490
		GG	0.3440	0.2990	0.2980	0.2815	0.2405	0.2570

續表四

			$p = 0.2$			$p = 0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	方法	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2375	0.1920	0.2065	0.1820	0.1750	0.1840
		NP	0.0720	0.0985	0.1145	0.0255	0.0600	0.0665
		GG	0.2615	0.2165	0.2080	0.2125	0.1920	0.1845
	(0.2, 0)	**NT**	0.2620	0.1935	0.2155	0.1970	0.1750	0.1895
		NP	0.0655	0.0830	0.1280	0.0185	0.0375	0.0680
		GG	0.2940	0.2310	0.2260	0.2170	0.1980	0.2060
	(0.5, 0)	**NT**	0.3025	0.2360	0.2525	0.2295	0.2030	0.2275
		NP	0.0630	0.0900	0.1275	0.0130	0.0335	0.0725
		GG	0.3290	0.2575	0.2665	0.2460	0.2140	0.2295
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3700	0.2595	0.2720	0.2450	0.2055	0.2450
		NP	0.0640	0.0950	0.1360	0.0145	0.0230	0.0550
		GG	0.4270	0.3555	0.3615	0.3130	0.2815	0.3065

續表四

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	方法	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2870	0.2405	0.2665	0.2085	0.2100	0.2305
		NP	0.1840	0.1800	0.1940	0.0990	0.1140	0.1320
		GG	0.3185	0.2575	0.2730	0.2420	0.2185	0.2330
	(0.2, 0)	**NT**	0.3255	0.2520	0.2660	0.2330	0.2300	0.2475
		NP	0.1875	0.1825	0.1975	0.0915	0.1215	0.1335
		GG	0.3585	0.2800	0.2800	0.2810	0.2530	0.2515
	(0.5, 0)	**NT**	0.4275	0.3155	0.3425	0.3115	0.2725	0.3105
		NP	0.2095	0.2055	0.2435	0.0835	0.1200	0.1660
		GG	0.4480	0.3520	0.3520	0.3350	0.2910	0.3230
	(0.5,0.2)	**NT**	0.4580	0.3480	0.3695	0.3115	0.2795	0.3345
		NP	0.5360	0.2155	0.2850	0.0770	0.1135	0.1710
		GG	0.2155	0.4535	0.4710	0.4130	0.3815	0.4250

（b）(X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2)均由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2025	0.1695	0.1905	0.1615	0.1325	0.1620
		NP	0.0790	0.0965	0.1200	0.0370	0.0435	0.0635
		GG	0.2210	0.1815	0.2035	0.1865	0.1465	0.1755
	(0.2, 0)	**NT**	0.1960	0.1685	0.1910	0.1410	0.1550	0.1535
		NP	0.0725	0.0885	0.1085	0.0235	0.0525	0.0605
		GG	0.2350	0.2010	0.2095	0.1770	0.1745	0.1635
	(0.5, 0)	**NT**	0.2490	0.1910	0.2055	0.1780	0.1495	0.1875
		NP	0.0685	0.0930	0.1120	0.0230	0.0350	0.0670
		GG	0.3120	0.2420	0.2190	0.2175	0.1870	0.1945
	(0.5,0.2)	**NT**	0.2615	0.2080	0.2200	0.1750	0.1695	0.2130
		NP	0.0670	0.0870	0.1150	0.0150	0.0335	0.0675
		GG	0.3025	0.2535	0.2310	0.2180	0.2025	0.2205

續表四

			$p = 0.2$			$p = 0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	方法	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2355	0.1845	0.2060	0.1790	0.1585	0.1815
		NP	0.0705	0.0960	0.1255	0.0200	0.0470	0.0670
		GG	0.2690	0.2050	0.2125	0.2000	0.1800	0.1820
	(0.2, 0)	**NT**	0.2730	0.2045	0.2050	0.1720	0.1810	0.2075
		NP	0.0745	0.0935	0.1220	0.0130	0.0500	0.0785
		GG	0.3160	0.2435	0.2270	0.2145	0.2040	0.2100
	(0.5, 0)	**NT**	0.2925	0.2210	0.2340	0.1960	0.1670	0.2100
		NP	0.0620	0.0865	0.1365	0.0195	0.0295	0.0685
		GG	0.3470	0.2700	0.2575	0.2470	0.1950	0.2240
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3125	0.2580	0.2645	0.2060	0.1965	0.2165
		NP	0.0570	0.0935	0.1310	0.0130	0.0365	0.0565
		GG	0.3375	0.2840	0.2705	0.2380	0.2125	0.2280

續表四

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2790	0.2310	0.2700	0.0160	0.2090	0.2475
		NP	0.1795	0.1705	0.2095	0.0905	0.1085	0.1520
		GG	0.3145	0.2590	0.2780	0.2500	0.2290	0.2545
	(0.2, 0)	**NT**	0.3015	0.2595	0.2895	0.2200	0.2235	0.2335
		NP	0.1805	0.2000	0.2145	0.0870	0.1180	0.1355
		GG	0.3575	0.2955	0.3000	0.2645	0.2460	0.2445
	(0.5, 0)	**NT**	0.3845	0.3050	0.3200	0.2490	0.2545	0.3020
		NP	0.2195	0.2250	0.2320	0.0880	0.1240	0.1560
		GG	0.4630	0.3715	0.3455	0.3180	0.2875	0.3105
	(0.5,0.2)	**NT**	0.4115	0.3210	0.3775	0.2985	0.2730	0.3005
		NP	0.2220	0.2345	0.2555	0.1005	0.1265	0.1500
		GG	0.4685	0.3785	0.3895	0.3640	0.2960	0.3030

（c）(X_1, X_2) 由甘伯關聯結構聯結，(Y_1, Y_2) 由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.1855	0.1545	0.1765	0.1465	0.1530	0.1695
		NP	0.0875	0.0840	0.1090	0.0315	0.0605	0.0735
		GG	0.2035	0.1615	0.1780	0.1615	0.1590	0.1765
	(0.2, 0)	**NT**	0.2095	0.1605	0.1940	0.1570	0.1565	0.1710
		NP	0.0830	0.0735	0.1185	0.0295	0.0495	0.0625
		GG	0.2310	0.1815	0.2040	0.1775	0.1800	0.1900
	(0.5, 0)	**NT**	0.2750	0.2125	0.2375	0.1860	0.1765	0.1780
		NP	0.0610	0.0870	0.1210	0.0160	0.0365	0.0640
		GG	0.2905	0.2355	0.2510	0.2205	0.2015	0.1905
	(0.5,0.2)	**NT**	0.2915	0.2330	0.2460	0.2040	0.2045	0.2085
		NP	0.0690	0.0995	0.1310	0.0140	0.0440	0.0675
		GG	0.2935	0.2550	0.2570	0.2190	0.2100	0.2170

續表四

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2325	0.1745	0.2060	0.1865	0.1705	0.1925
		NP	0.2605	0.0805	0.1305	0.0320	0.0520	0.0715
		GG	0.0700	0.2010	0.2185	0.2130	0.1890	0.1940
	(0.2, 0)	**NT**	0.2580	0.1990	0.2030	0.1730	0.1605	0.2100
		NP	0.0780	0.0975	0.1165	0.0155	0.0435	0.0775
		GG	0.2840	0.2285	0.2285	0.2100	0.1800	0.2225
	(0.5, 0)	**NT**	0.3445	0.2480	0.2355	0.2120	0.2035	0.2355
		NP	0.0760	0.0980	0.1130	0.0110	0.2100	0.0680
		GG	0.3525	0.2575	0.2570	0.2260	0.0400	0.2410
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3550	0.2635	0.2695	0.2325	0.2175	0.2280
		NP	0.0545	0.0830	0.1330	0.0145	0.0275	0.0610
		GG	0.3630	0.2685	0.2810	0.2415	0.2165	0.2470

續表四

			$p = 0.2$			$p = 0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2920	0.2620	0.2710	0.2195	0.2065	0.2500
		NP	0.1985	0.1900	0.2025	0.0900	0.1210	0.1420
		GG	0.3175	0.2735	0.2710	0.2510	0.2290	0.2595
	(0.2, 0)	**NT**	0.3205	0.2655	0.2830	0.2395	0.2225	0.2625
		NP	0.1835	0.1915	0.2035	0.0950	0.1210	0.1475
		GG	0.3470	0.3005	0.3050	0.2745	0.2465	0.2705
	(0.5, 0)	**NT**	0.4380	0.3000	0.3550	0.3140	0.2600	0.2935
		NP	0.2195	0.1965	0.2510	0.0900	0.1180	0.1505
		GG	0.4755	0.3360	0.3760	0.3335	0.2790	0.3035
	(0.5,0.2)	**NT**	0.4700	0.3405	0.3705	0.3260	0.2925	0.3300
		NP	0.2180	0.2120	0.2425	0.0870	0.1180	0.1530
		GG	0.4900	0.3645	0.3810	0.3385	0.3130	0.3425

表五 (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2) 由不同關聯結構聯結的二元韋柏分布之下，非劣性檢定的檢定力估計值

(a) (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2) 均由甘伯關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2325	0.1690	0.1870	0.1720	0.1360	0.1620
		NP	0.0795	0.0895	0.1015	0.0225	0.0505	0.0655
		GG	0.2130	0.1785	0.1810	0.1705	0.1520	0.1600
	(0.2, 0)	**NT**	0.2860	0.1835	0.2110	0.1920	0.1440	0.1875
		NP	0.0780	0.0865	0.1215	0.0285	0.0480	0.0715
		GG	0.2290	0.2040	0.2110	0.1745	0.1700	0.1875
	(0.5, 0)	**NT**	0.3240	0.2100	0.2295	0.2310	0.1790	0.1905
		NP	0.0775	0.0880	0.2390	0.0210	0.4350	0.0605
		GG	0.2855	0.2345	0.1225	0.2240	0.2060	0.1955
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3295	0.2115	0.2310	0.2420	0.1795	0.1920
		NP	0.0590	0.0870	0.1250	0.0150	0.0375	0.0555
		GG	0.3420	0.2815	0.3095	0.2765	0.2485	0.2790

續表五

(m,n)	(τ_X, τ_Y)	方法	$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
			0.14	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2625	0.1935	0.2180	0.1730	0.1705	0.1880
		NP	0.0795	0.0985	0.1260	0.0185	0.0465	0.0680
		GG	0.2755	0.2180	0.2220	0.2030	0.1835	0.1895
	(0.2, 0)	**NT**	0.3235	0.2065	0.2190	0.1970	0.1840	0.1845
		NP	0.0635	0.0965	0.1180	0.0160	0.0445	0.0615
		GG	0.3070	0.2470	0.2305	0.2105	0.1990	0.2060
	(0.5, 0)	**NT**	0.4025	0.2430	0.2545	0.2770	0.2025	0.2335
		NP	0.0680	0.0930	0.1410	0.0160	0.0445	0.0715
		GG	0.3375	0.2600	0.2705	0.2660	0.2155	0.2355
	(0.5,0.2)	**NT**	0.4395	0.2675	0.2760	0.2815	02090	0.2315
		NP	0.0555	0.0810	0.1400	0.0105	0.0300	0.0445
		GG	0.4275	0.3205	0.3700	0.3040	0.2855	0.3045

續表五

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.3670	0.2375	0.2675	0.2420	0.2055	0.2450
		NP	0.1750	0.1760	0.1980	0.0915	0.1165	0.1420
		GG	0.3110	0.2540	0.2695	0.2445	0.2160	0.2425
	(0.2, 0)	**NT**	0.4360	0.2435	0.2905	0.3355	0.2180	0.2690
		NP	0.2035	0.1690	0.2060	0.1100	0.1135	0.1325
		GG	0.3540	0.2650	0.2990	0.3070	0.2370	0.2680
	(0.5, 0)	**NT**	0.5075	0.3340	0.3530	0.3570	0.2820	0.3085
		NP	0.2180	0.2140	0.2435	0.0900	0.2990	0.1615
		GG	0.4545	0.3695	0.3615	0.3325	0.1295	0.3145
	(0.5,0.2)	**NT**	0.5360	0.3260	0.3845	0.3515	0.2725	0.3340
		NP	0.2215	0.4290	0.2910	0.4000	0.1110	0.1705
		GG	0.5495	0.2135	0.4680	0.0805	0.3855	0.4135

(b) (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2) 均由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
					θ_2			
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2410	0.1765	0.1750	0.1695	0.1465	0.1720
		NP	0.0825	0.0960	0.1020	0.0290	0.0445	0.0720
		GG	0.2090	0.1990	0.1850	0.1695	0.1620	0.1840
	(0.2, 0)	**NT**	0.2900	0.1805	0.1945	0.1875	0.1390	0.1530
		NP	0.0715	0.1000	0.1050	0.0340	0.0465	0.0550
		GG	0.2315	0.2040	0.2020	0.1805	0.1695	0.1585
	(0.5, 0)	**NT**	0.3245	0.1815	0.2290	0.2350	0.1505	0.1910
		NP	0.0495	0.0885	0.1270	0.0215	0.0360	0.0645
		GG	0.2855	0.2280	0.2300	0.2335	0.1910	0.2095
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3520	0.2010	0.2430	0.2525	0.1835	0.2040
		NP	0.0650	0.0835	0.1205	0.0220	0.0370	0.0635
		GG	0.3090	0.2395	0.2530	0.2280	0.2065	0.2140

續表五

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2555	0.1900	0.2000	0.1765	0.1395	0.1955
		NP	0.0830	0.0870	0.1145	0.0230	0.0350	0.0680
		GG	0.2730	0.2155	0.2145	0.2090	0.1595	0.2000
	(0.2, 0)	**NT**	0.3130	0.1790	0.2055	0.2170	0.1680	0.1840
		NP	0.0630	0.0770	0.1215	0.1750	0.0410	0.0630
		GG	0.3055	0.2190	0.2205	0.2385	0.1850	0.1910
	(0.5, 0)	**NT**	0.4135	0.2190	0.2570	0.2760	0.1800	0.2220
		NP	0.0590	0.0920	0.1450	0.0120	0.0360	0.0715
		GG	0.3475	0.2685	0.2730	0.2450	0.2030	0.2330
	(0.5,0.2)	**NT**	0.4120	0.2455	0.2650	0.2828	0.1995	0.2390
		NP	0.4120	0.0900	0.1280	0.0130	0.0310	0.2335
		GG	0.3425	0.2850	0.2645	0.2515	0.2225	0.0610

續表五

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.3860	0.2290	0.2550	0.2535	0.2145	0.2515
		NP	0.1890	0.1585	0.1910	0.2375	0.1160	0.1375
		GG	0.3340	0.2465	0.2615	0.0915	0.2365	0.2480
	(0.2, 0)	**NT**	0.4610	0.2575	0.2925	0.3115	0.2240	0.2565
		NP	0.1885	0.1890	0.2120	0.0890	0.1180	0.1285
		GG	0.3740	0.2905	0.3030	0.2715	0.2475	0.2580
	(0.5, 0)	**NT**	0.4935	0.2890	0.3465	0.3430	0.2445	0.2995
		NP	0.2180	0.2135	0.2545	0.0825	0.1255	0.1640
		GG	0.4650	0.3475	0.3705	0.3235	0.2895	0.3110
	(0.5,0.2)	**NT**	0.5050	0.3180	0.3685	0.3610	0.2660	0.3180
		NP	0.4615	0.2070	0.2475	0.3300	0.1210	0.1470
		GG	0.2135	0.3775	0.3700	0.0860	0.2669	0.3050

（c）(X_1, X_2) 由甘伯關聯結構聯結、(Y_1, Y_2) 由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2595	0.1525	0.1830	0.1730	0.1355	0.1780
		NP	0.0820	0.0915	0.1190	0.0330	0.0510	0.0680
		GG	0.2165	0.1660	0.1880	0.1675	0.1535	0.1715
	(0.2, 0)	**NT**	0.2960	0.1640	0.2010	0.2050	0.1530	0.1575
		NP	0.0795	0.0865	0.1245	0.0250	0.0410	0.0550
		GG	0.2300	0.1840	0.2115	0.1955	0.1795	0.1660
	(0.5, 0)	**NT**	0.3570	0.2030	0.2265	0.2370	0.1810	0.1970
		NP	0.0635	0.0925	0.1275	0.0185	0.0435	0.0685
		GG	0.2975	0.2335	0.2375	0.2090	0.2085	0.2135
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3440	0.2180	0.2500	0.2235	0.1970	0.2150
		NP	0.0670	0.0715	0.1290	0.016	0.0400	0.0620
		GG	0.3200	0.2340	0.2665	0.2120	0.2025	0.2085

續表五

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2535	0.1985	0.2035	0.1875	0.1805	0.1860
		NP	0.0715	0.0955	0.1200	0.0230	0.0575	0.0625
		GG	0.2665	0.2245	0.2160	0.1980	0.1880	0.1855
	(0.2, 0)	**NT**	0.3145	0.2020	0.2325	0.2375	0.1670	0.1955
		NP	0.0710	0.0920	0.1325	0.0205	0.0450	0.0725
		GG	0.2945	0.2240	0.2400	0.2320	0.1895	0.2065
	(0.5, 0)	**NT**	0.3850	0.2525	0.2530	0.2705	0.2055	0.2205
		NP	0.0610	0.0835	0.1290	0.0080	0.0430	0.0685
		GG	0.3175	0.2715	0.2615	0.2370	0.2105	0.2320
	(0.5,0.2)	**NT**	0.4360	0.2720	0.2815	0.2950	0.2195	0.2565
		NP	0.0620	0.0875	0.1275	0.0125	0.0405	0.0640
		GG	0.3545	0.2895	0.2820	0.2440	0.2300	0.2260

續表五

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.3755	0.2420	0.2645	0.2640	0.2050	0.2540
		NP	0.1850	0.1815	0.1940	0.0885	0.1085	0.1305
		GG	0.3220	0.2625	0.2655	0.2500	0.2225	0.2455
	(0.2, 0)	**NT**	0.4550	0.2520	0.2860	0.3085	0.2245	0.2645
		NP	0.1750	0.1850	0.2090	0.0980	0.1205	0.1475
		GG	0.3655	0.2855	0.3000	0.2820	0.2470	0.2750
	(0.5, 0)	**NT**	0.4862	0.3275	0.3450	0.3545	0.2740	0.3165
		NP	0.2115	0.2210	0.2455	0.0860	0.1120	0.1500
		GG	0.4400	0.3715	0.3570	0.3345	0.3020	0.3145
	(0.5,0.2)	**NT**	0.5095	0.3700	0.3840	0.3705	0.3030	0.3355
		NP	0.2145	0.2180	0.2610	0.0830	0.1250	0.1565
		GG	0.4675	0.3925	0.3910	0.3360	0.3065	0.3240

表六 (X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2) 由不同關聯結構聯結的二元廣義伽瑪分布之下，非劣性檢定的檢定力估計值

(a) (X_1,X_2) 、(Y_1,Y_2) 均由甘伯關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2565	0.1410	0.1915	0.1630	0.1425	0.1630
		NP	0.0995	0.0935	0.1335	0.0315	0.0555	0.0700
		GG	0.2750	0.2120	0.2030	0.2395	0.2205	0.1920
	(0.2, 0)	**NT**	0.2465	0.1555	0.1835	0.1605	0.1415	0.1965
		NP	0.0900	0.0995	0.1335	0.0390	0.0525	0.0790
		GG	0.2955	0.2695	0.2355	0.3000	0.2560	0.2525
	(0.5, 0)	**NT**	0.3525	0.1545	0.2255	0.1590	0.1505	0.2200
		NP	0.0835	0.1130	0.1500	0.0150	0.0340	0.0745
		GG	0.4365	0.3555	0.3215	0.3850	0.3515	0.3065
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3750	0.1665	0.2485	0.1635	0.1580	0.2505
		NP	0.0845	0.1055	0.1615	0.0165	0.0410	0.0700
		GG	0.4860	0.4085	0.3670	0.4390	0.4035	0.4065

續表六

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2665	0.1895	0.2275	0.1725	0.1480	0.2335
		NP	0.0760	0.1120	0.1340	0.0140	0.0405	0.0770
		GG	0.3740	0.3225	0.2515	0.3415	0.2910	0.2785
	(0.2, 0)	**NT**	0.2480	0.1735	0.2205	0.1640	0.1650	0.2325
		NP	0.0705	0.1015	0.1465	0.0150	0.0420	0.0715
		GG	0.4380	0.3585	0.2870	0.4000	0.3520	0.3140
	(0.5, 0)	**NT**	0.3230	0.1800	0.2720	0.1715	0.1610	0.2330
		NP	0.0630	0.0965	0.1630	0.0050	0.0250	0.0590
		GG	0.6095	0.4785	0.3565	0.5510	0.4340	0.3720
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3485	0.1940	0.3070	0.1955	0.1715	0.2610
		NP	0.0600	0.0870	0.1800	0.0035	0.0190	0.0535
		GG	0.6445	0.5365	0.4695	0.6100	0.5410	0.4770

續表六

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X,τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.3070	0.2080	0.3095	0.2320	0.2015	0.3075
		NP	0.2075	0.1935	0.2240	0.1000	0.1405	0.1680
		GG	0.4065	0.3500	0.3345	0.3820	0.3495	0.3325
	(0.2, 0)	**NT**	0.3575	0.2280	0.3355	0.1995	0.2145	0.3500
		NP	0.2225	0.2190	0.2665	0.0900	0.1445	0.1990
		GG	0.4790	0.4090	0.3965	0.4375	0.4320	0.4180
	(0.5, 0)	**NT**	0.5205	0.2670	0.4075	0.2950	0.2460	0.3870
		NP	0.2800	0.2750	0.3290	0.1155	0.1600	0.2180
		GG	0.6985	0.6085	0.5040	0.6520	0.6060	0.5390
	(0.5,0.2)	**NT**	0.5535	0.2960	0.4380	0.2955	0.2675	0.4420
		NP	0.2795	0.2885	0.3480	0.1190	0.1500	0.2240
		GG	0.7185	0.6675	0.6075	0.6985	0.6715	0.6360

(b) (X_1, X_2) 、(Y_1, Y_2)均由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
						θ_2		
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2470	0.1590	0.1845	0.1585	0.1230	0.1865
		NP	0.1005	0.0965	0.1240	0.0345	0.0490	0.0845
		GG	0.2885	0.2465	0.2115	0.2400	0.2075	0.2110
	(0.2, 0)	**NT**	0.2320	0.1510	0.1900	0.1690	0.1385	0.1970
		NP	0.0835	0.1045	0.1205	0.0270	0.0565	0.0755
		GG	0.3155	0.2525	0.2160	0.2790	0.2530	0.2400
	(0.5, 0)	**NT**	0.3485	0.1385	0.2220	0.1400	0.1275	0.2315
		NP	0.0790	0.0860	0.1475	0.0195	0.0410	0.0710
		GG	0.4700	0.3590	0.2795	0.3840	0.3325	0.3005
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3570	0.1750	0.2665	0.1825	0.1715	0.2630
		NP	0.0755	0.1095	0.1535	0.0135	0.0335	0.0705
		GG	0.4980	0.3925	0.3070	0.4155	0.3660	0.2970

續表六

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2460	0.1670	0.2270	0.1675	0.1500	0.2170
		NP	0.0705	0.0975	0.1320	0.0175	0.0390	0.0555
		GG	0.3765	0.3195	0.2710	0.3505	0.3025	0.2805
	(0.2, 0)	**NT**	0.2730	0.1700	0.2330	0.1680	0.1420	0.2255
		NP	0.0755	0.1020	0.1450	0.0125	0.0290	0.0765
		GG	0.4640	0.3605	0.2870	0.4130	0.3155	0.2900
	(0.5, 0)	**NT**	0.2985	0.1800	0.2560	0.1740	0.1500	0.2485
		NP	0.0595	0.1000	0.1625	0.0035	0.0235	0.0720
		GG	0.6500	0.4885	0.3430	0.5755	0.4245	0.3675
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3195	0.2010	0.3065	0.1960	0.1840	0.2800
		NP	0.0505	0.0950	0.1605	0.0065	0.0210	0.0580
		GG	0.6325	0.5175	0.3740	0.5980	0.4375	0.3715

續表六

(m,n)	(τ_X, τ_Y)	方法	$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
			0.14	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2920	0.2215	0.3140	0.2380	0.1975	0.3125
		NP	0.2100	0.2220	0.2330	0.1150	0.1285	0.1650
		GG	0.4165	0.3805	0.3460	0.4050	0.3490	0.3455
	(0.2, 0)	**NT**	0.3445	0.2170	0.3530	0.2105	0.2120	0.3440
		NP	0.2350	0.2105	0.2655	0.1100	0.1340	0.1880
		GG	0.5045	0.4045	0.3895	0.4650	0.4005	0.3650
	(0.5, 0)	**NT**	0.5285	0.2600	0.4070	0.2655	0.2415	0.4255
		NP	0.3015	0.2910	0.3230	0.0960	0.1560	0.2235
		GG	0.7535	0.6225	0.4735	0.6670	0.5885	0.5050
	(0.5,0.2)	**NT**	0.5405	0.2770	0.4620	0.2740	0.2715	0.4670
		NP	0.3120	0.2815	0.3260	0.0955	0.1615	0.2090
		GG	0.7515	0.6330	0.4980	0.6680	0.6175	0.5090

（c）(X_1, X_2)由甘伯關聯結構聯結、(Y_1, Y_2)由法蘭克關聯結構聯結

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(50,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2620	0.1535	0.2030	0.1695	0.1295	0.1825
		NP	0.1055	0.1005	0.1310	0.0345	0.0555	0.0735
		GG	0.2755	0.2405	0.2140	0.2410	0.2065	0.1970
	(0.2, 0)	**NT**	0.2690	0.1720	0.1900	0.1590	0.1270	0.1990
		NP	0.1025	0.1145	0.1305	0.0335	0.0485	0.2505
		GG	0.3300	0.2855	0.2515	0.2740	0.2445	0.0695
	(0.5, 0)	**NT**	0.3505	0.1680	0.2155	0.1615	0.1325	0.2185
		NP	0.0915	0.0985	0.1375	0.0175	0.0450	0.0750
		GG	0.4515	0.3715	0.3180	0.3960	0.3495	0.3190
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3535	0.1785	0.2740	0.1705	0.1625	0.2500
		NP	0.0715	0.1025	0.1620	0.0190	0.0370	0.0740
		GG	0.4430	0.3855	0.3425	0.4120	0.3570	0.3445

續表六

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,50)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2500	0.1625	0.2155	0.1755	0.1465	0.2170
		NP	0.0695	0.0940	0.1405	0.0135	0.0395	0.0650
		GG	0.3690	0.3180	0.2545	0.3450	0.2970	0.2675
	(0.2, 0)	**NT**	0.2460	0.1560	0.2380	0.1675	0.1620	0.2355
		NP	0.4370	0.0940	0.1435	0.0135	0.0420	0.0740
		GG	0.0655	0.3705	0.3035	0.4075	0.3500	0.2910
	(0.5, 0)	**NT**	0.3175	0.1915	0.2550	0.1790	0.1540	0.2435
		NP	0.0645	0.1055	0.1575	0.0055	0.0190	0.0515
		GG	0.5935	0.4965	0.3875	0.5390	0.4470	0.3680
	(0.5,0.2)	**NT**	0.3305	0.2290	0.3060	0.2055	0.1940	0.2960
		NP	0.0600	0.1095	0.1580	0.0040	0.0240	0.0605
		GG	0.6120	0.5250	0.4025	0.5610	0.4660	0.3925

續表六

			$p=0.2$			$p=0.1$		
			θ_2					
(m,n)	(τ_X, τ_Y)	**方法**	**0.14**	**0.11**	**0.06**	**0.06**	**0.045**	**0.03**
(100,100)	**(0 , 0)**	**NT**	0.2920	0.2090	0.3175	0.2535	0.2125	0.3165
		NP	0.2100	0.1980	0.2355	0.1185	0.1335	0.1785
		GG	0.4165	0.3650	0.3385	0.4050	0.3620	0.3385
	(0.2, 0)	**NT**	0.3445	0.2375	0.3500	0.2205	0.2110	0.3550
		NP	0.2350	0.2175	0.2790	0.1105	0.1370	0.2105
		GG	0.5045	0.4345	0.4225	0.4440	0.4115	0.4225
	(0.5, 0)	**NT**	0.5285	0.2710	0.4115	0.2620	0.2505	0.4110
		NP	0.3015	0.2760	0.3410	0.1050	0.1635	0.2260
		GG	0.7535	0.6105	0.5265	0.6495	0.6060	0.5510
	(0.5,0.2)	**NT**	0.5405	0.3120	0.4610	0.2705	0.2680	0.4515
		NP	0.3120	0.2815	0.3345	0.1015	0.1555	0.2320
		GG	0.7515	0.6430	0.5500	0.6695	0.6130	0.5835